

التحويلات الهندسية Geometry Transformations

الوحدة السابعة

ابتكارات

Innovations



مشروع الوحدة :
(ابتداعات هندسية)



يعتبر الابتكار إحدى الحالات العقلية البشرية التي تسعى إلى إيجاد أفكار ووسائل مختلفة لحل المشاكل ، ويشكل الابتكار إضافة حقيقية لمجموع الإنتاج الإنساني ، كما أنه يحقق فائدة حقيقية على أرض الواقع ، لا سيما إذا ارتبط بالمواضيع التطبيقية . وفي هذا المشروع ، استحدثت عن كيفية خلق الأفكار الابتكارية والمبدعة من دراسة التحويلات الهندسية .

خطوة العمل :

رسم أشكال منوعة على النظام الإحداثي وعمل عدة تحويلات هندسية لها بحيث يصل إلى ابتكار شكل معين .

www.schoolkwp.com خطوات تنفيذ المشروع :

عدد مرات التحويل	نوع التحويل	الشكل

- اختر شكلا هندسيًا من الأشكال التالية (مثلث ، مربع ، ...) مرسومًا على النظام الإحداثي بحيث يقع أحد رؤوس الشكل المختار على نقطة الأصل .
- حدّد التحويل الهندسي الذي ستوظفه لابتكار شكل محدد .
- طبق التحويل الهندسي عدة مرات للشكل وصوره .
- حدّد إحداثيات نقاط الشكل الأصلي .
- حدّد إحداثيات التحويل الهندسي المستخدم في جدول بدء المشروع .



علاقات وتواصل :

- التواصل بين المجموعات لإعطاء تقييم على الابتكار الأجل وتحديد صحة القاعدة المستخدمة .
- عرض العمل :
- تعرض الابتكارات أمام المتعلمين لإعطاء تقدير لكل ابتكار .

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة

التحويلات الهندسية

في المستوى
الإحداثي

في المستوى

الإزاحة

الدوران

الانعكاس

حول نقطة

تناظر



الانعكاس في نقطة – التناظر حول نقطة Reflection of a Point – Symmetry at the Point

١-٧

العبارات والمفردات:

المستوى الإحداثي

Coordinate

Plane

محاور الإحداثيات

Coordinate

Axes

المحور السيني سـ

X-Axis

المحور الصادي صـ

Y-Axis

نقطة الأصل

Origin Point

الزوج المرتب

Ordered Pair

الإحداثي السيني

X Coordinate

الإحداثي الصادي

Y Coordinate

التحويل الهندسي

Transformation

الانعكاس في نقطة

Reflection of

a Point

التناظر حول نقطة

Symmetry at

the Point

تذكر أن:

(س، ص) زوج مرتب

س: الإحداثي السيني

لأي نقطة يدل على

مقدار بعد النقطة

يميناً أو يساراً عن

محور الصادات.

ص: الإحداثي الصادي

لأي نقطة يدل على

مقدار بعد النقطة

لأعلى أو لأسفل عن

محور السينات.

سوف تتعلم: الانعكاس في نقطة في (المستوى – المستوى الإحداثي) – التناظر حول نقطة.



في كثير من الأحيان ، يلجأ الفنانون التشكيليون وكذلك مصممو برامج الحاسوب إلى استعمال الانعكاس بجميع أنواعه لابتكار لوحات وتصميمات جميلة.

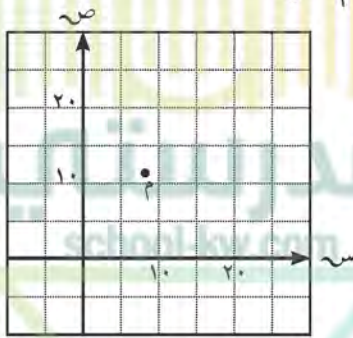
نشاط (١):

مما سبق دراسته في الصف السابع:

١ أنسب زوج مرتب يمكن أن يمثل إحداثي النقطة م هو:

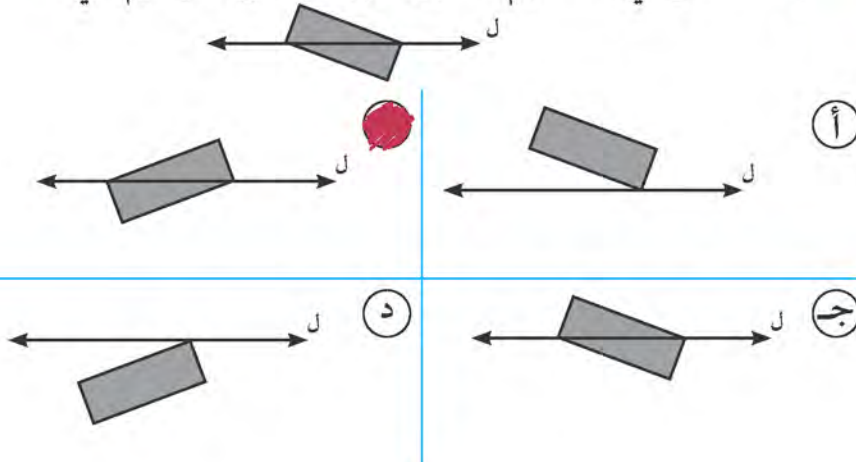
أ (١٥، ٨) ب (٨، ٨)

ج (١٢، ٨) د (١٦، ٩)



ب بالنظر إلى الشكل التالي:

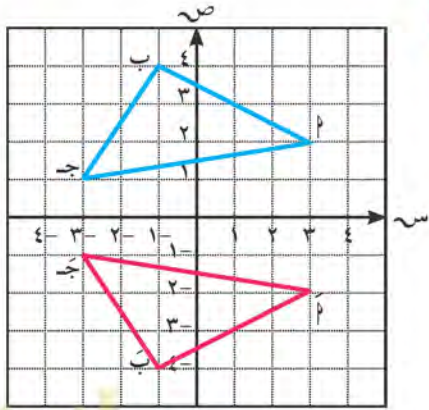
بالانعكاس في المستقيم ل فإن صورة الشكل المرسوم هي:



٢ حدّد نوع التحويل في كل من الأشكال التالية ، ثم اكتب إحداثي كل نقطة وصورتها :

معلومات مفيدة :

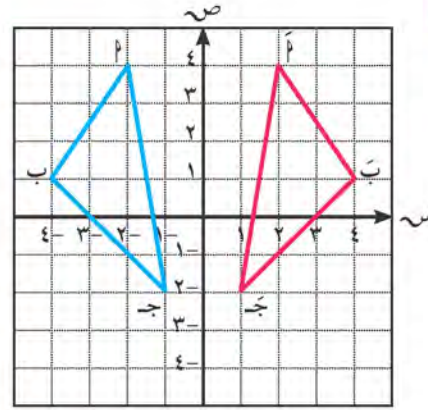
- يلاحظ التماثل في ورق الشجر وفي وجه الإنسان وفي رأس الحيوان ، وهذا يدلّ على عظمة الخالق.
- يكتشف الأطباء - مثلًا أيّ تغبّر يحدث في وجه الإنسان في الجانب الأيمن عن الجانب الأيسر ، ويحدّدون ما إذا كان هناك ورم يمكن علاجه.



السيني

انعكاس من محور **السيني**

$P(1, 3) \rightarrow \bar{P}(-1, 3)$
 $B(1, 1) \rightarrow \bar{B}(-1, 1)$
 $J(-1, 1) \rightarrow \bar{J}(-3, 1)$



الصادي

انعكاس من محور **الصادي**

$P(1, 3) \rightarrow \bar{P}(1, -3)$
 $B(1, 1) \rightarrow \bar{B}(1, -1)$
 $J(-1, 1) \rightarrow \bar{J}(-1, -1)$

تمّ تكميل الحل من موقع مدرستي

School-kw.com

الانعكاس في نقطة في المستوى

نشاط (٢) :



في الشكل المقابل : رسمت كلاً من \overline{AB} والنقطة م في المستوى ،

$M \notin \overline{AB}$ ، رسمنا \overline{AM} وناخذ عليه \overline{AM} بحيث : $M\overline{A} = \overline{AM}$.

نسمي \overline{M} صورة النقطة \overline{A} بالانعكاس في النقطة م .

• باستخدام المسطرة ارسم \overline{BM} كما تم رسم \overline{AM} .

• باستخدام الفرجار قس طول \overline{BM} .

• بنفس فتحة الفرجار ثبت السن عند م ، ثم ارسم قوساً يقطع \overline{BM} في نقطة ولتكن \overline{B} .

• صل \overline{AM} ، \overline{B} لتحصل على \overline{AB} .

نسمي \overline{A} ، \overline{B} صورتتي النقطتين \overline{A} ، \overline{B} بالانعكاس في النقطة م .

وأيضاً \overline{AB} صورة \overline{AB} بالانعكاس في النقطة م .

تذكر أن :

- (١) يُغيّر الانعكاس في المحور السيني الإحداثي الصادي إلى معكوسة الجمعي . أي أن :
 $A(x, y) \rightarrow \bar{A}(x, -y)$
- (٢) يُغيّر الانعكاس في المحور الصادي الإحداثي السيني إلى معكوسة الجمعي . أي أن :
 $A(x, y) \rightarrow \bar{A}(-x, y)$

اللوازم :

- فرجار
- مسطرة

مما سبق نستنتج أنّ :

الانعكاس في نقطة مثل م : هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة P في المستوى صورة $P' \ni P$ بحيث تكون $MP = MP'$. والنقطة الوحيدة التي تقترن بنفسها هي النقطة م التي تسمى مركز الانعكاس ، حيث م نقطة صامدة .

التناظر حول نقطة في المستوى

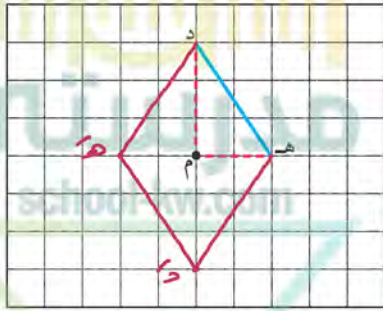
نشاط (٣) :



تذكر أنّ :

النقطة الصامدة هي
نقطة تقع على محور
الانعكاس .

من الشكل المقابل ، أكمل رسم الشكل الرباعي دهـ د هـ ، بحيث د صورة د بالانعكاس في النقطة م ، هـ صورة هـ بالانعكاس في النقطة م .
أكمل ما يلي :



∴ الشكل الرباعي دهـ د هـ ← الشكل الرباعي د هـ د هـ بالانعكاس في النقطة م .
مما سبق نجد أنّ الشكل الرباعي دهـ د هـ متناظر حول النقطة م (نقطة تقاطع قطريه) .

يقال لشكل هندسي إنّه متناظر حول نقطة إذا كانت صورته بالانعكاس في هذه النقطة هي الشكل نفسه .

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

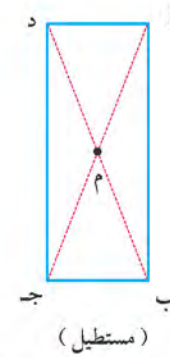
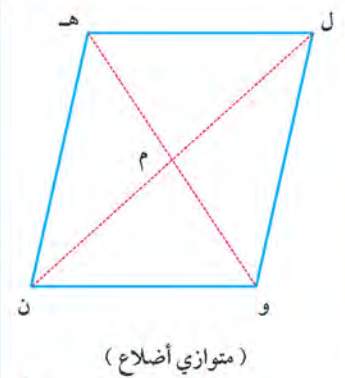
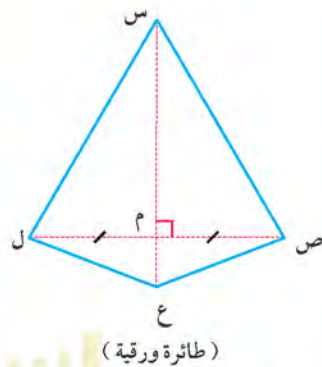
تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School - kw - com

تدرّب (١) 

أي الأشكال التالية متناظر حول نقطة ملتقى قطريه ؟ وضح ذلك .

تذكر أنّ :

- من خواص المستطيل القطران ينصف كل منهما الآخر وهما متطابقان .
- في متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر .



متناظر حول نقطة التقاء قطريه
لأن القطران ينصف كل منهما الآخر

غير متناظر حول نقطة التقاء القطران لأن القطران لا ينصف كل منهما الآخر

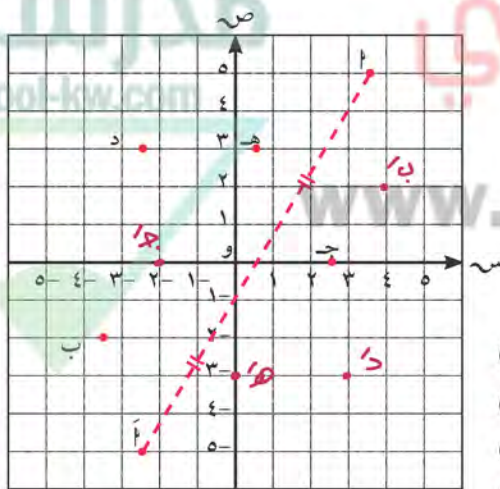
متناظر حول نقطة التقاء قطريه
لأن القطرين ينصف كل منهما الآخر

الانعكاس في نقطة الأصل في مستوى الإحداثيات :

نشاط (٤) :



استعن بالمستوى الإحداثي المقابل وباستخدام المسطرة و الفرجار كما في نشاط (٢) السابق ، أوجد صور النقاط التالية بالانعكاس في النقطة و (نقطة الأصل) :



أ (٥ ، ٣) ← أ (٣ ، ٥)
ب (٢ ، ٤) ← ب (٤ ، ٢)
ج (٠ ، ٢) ← ج (٢ ، ٠)
د (٣ ، ٣) ← د (٣ ، ٣)
هـ (٣ ، ٠) ← هـ (٠ ، ٣)

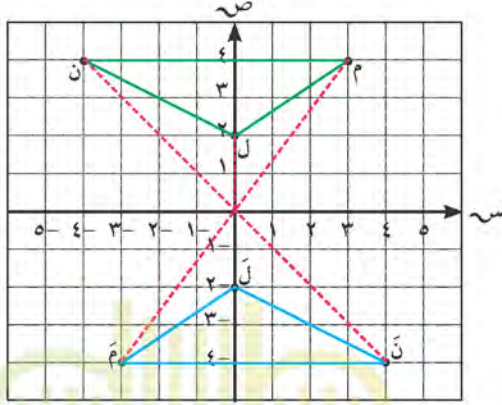
ماذا تلاحظ ؟

يغير الإحداثيان السيني والصادي الى معكوسهما الجمعي

في المستوى الإحداثي الانعكاس في نقطة الأصل هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة في المستوى صورة إحداثيها السيني وإحداثيها الصادي وهما المعكوس الجمعي للإحداثي السيني والصادي ، لهذه النقطة .

عمومًا : الانعكاس في نقطة الأصل (و) : (س ، ص) ← (- س ، - ص)

مثال : إذا كان $\Delta L M N$ هو صورة $\Delta ل م ن$ بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت ل (٢، ٠) ، م (٤، ٣) ، ن (٤، ٤-) ، فعين إحداثيات الرؤوس ل ، م ، ن ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .



الحل :

بالانعكاس في و (ع و) :

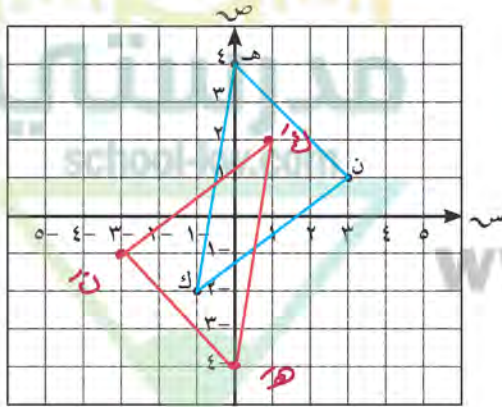
(س، ص) ← (س، -ص)

ل (٢، ٠) ← ل (٢، ٠)

م (٤، ٣) ← م (٤، ٣-)

ن (٤، ٤-) ← ن (٤، ٤)

لاحظ أن : الشكل الهندسي وصورته بالانعكاس في نقطة متطابقان (فسر ذلك) .



تدرّب (٢) :

إذا كان $\Delta هـ ك ن$ هو صورة $\Delta هـ ك ن$ هـ ك ن

بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ،

وكانت هـ (٤، ٠) ، ك (١-، ٢-) ،

ن (١، ٣) ، فعين إحداثيات الرؤوس

هـ ، ك ، ن ، ثم ارسم $\Delta هـ ك ن$

في مستوى الإحداثيات .

هـ (٤، ٠) ← هـ (٤، ٠)

ك (١-، ٢-) ← ك (١-، ٢)

ن (١، ٣) ← ن (١، ٣)

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

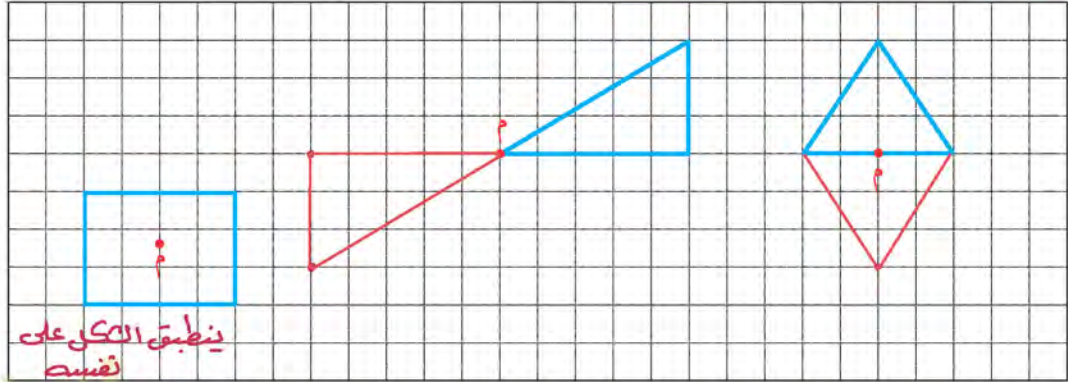
فكر وناقش

يرى خالد أن الانعكاس في نقطة الأصل يكافئ انعكاسًا في المحور السيني يليه انعكاس في المحور الصادي أو العكس . فهل رأي خالد صحيح ؟ فسّر ذلك .

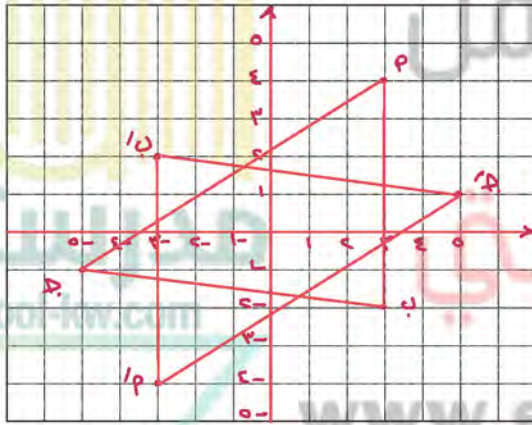
نعم رأي خالد صحيح ، لأن الإحداثيات السينية والصادية
تتغيران إلى معكوسهما الجمعي

تمرّن :

١ ارسم صورة كل شكل من الأشكال التالية بالانعكاس في النقطة م .



ينطبق الشكل على نفسه



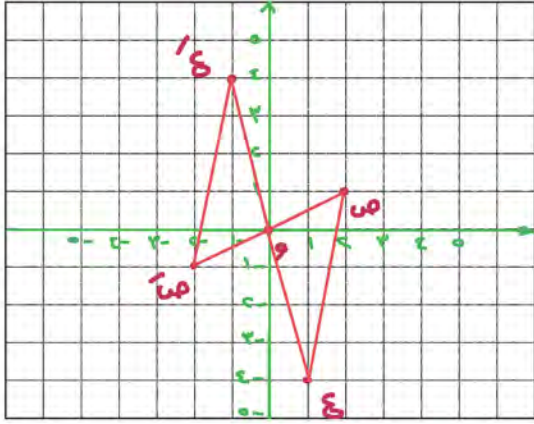
٢ إذا كان Δ PAB جـ هو صورة Δ $P' A' B'$ بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت $P(2, 3)$ ، $A(1, -5)$ ، $B(2, -3)$ ، فعين إحداثيات الرؤوس P' ، B' ، A' ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .

$$P(2, 3) \xrightarrow{ع} P'(2, -3)$$

$$B(2, -3) \xrightarrow{ع} B'(2, 3)$$

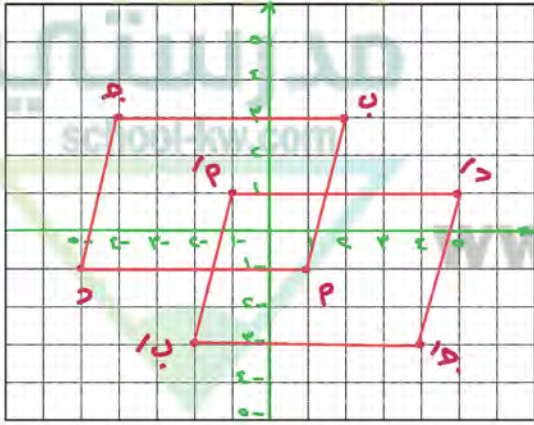
$$A(1, -5) \xrightarrow{ع} A'(-1, 5)$$

تمّ تكميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com



٣ إذا كان Δ و ص عَ هو صورة Δ و ص ع بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت و (٠، ٠) ، ص (١-، ٢-) ، ع (٤، ١-) ، فعين إحداثيات الرؤوس و ، ص ، ع ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .

و (٠، ٠) ← ع (٠، ٠)
 ص (١، ٢) ← ع (١، ٢)
 ع (٤، ١) ← ع (٤، ١)



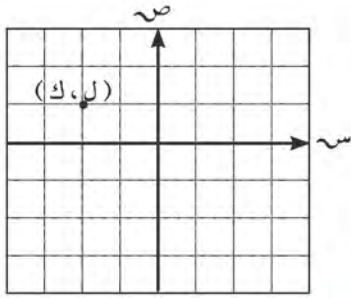
٤ إذا كان الشكل الرباعي أ ب ج د هو صورة الشكل الرباعي أ ب ج د بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت أ (١-، ١) ، ب (٣، ٢) ، ج (٣، ٤-) ، د (١-، ٥-) ، فعين إحداثيات الرؤوس أ ، ب ، ج ، د ، ثم ارسم الشكلين الرباعيين في مستوى الإحداثيات .

قد يساعدك هذا التصميم الهندسي في تصميم أشكال هندسية على برامج الحاسوب (مثلاً الفوتوشوب) الخاصة بك .

أ (١-، ١) ← ع (١، ١)
 ب (٣، ٢) ← ع (٣، ٢)
 ج (٣، ٤-) ← ع (٣، ٤)
 د (١-، ٥-) ← ع (١، ٥)

تم تحميل الملف من موقع
 مدرسين

٥ TIMSS 2019 في المستوى الإحداثي المرسوم عينت النقطة (ل، ك) فيه .
أي العبارات التالية ليست صحيحة ؟



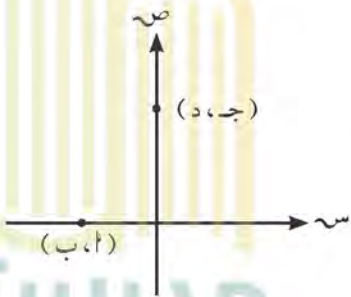
أ) $ل > ك$

ب) $ل > ك$

ج) $ل = ك$

د) ك عدد موجب

٦ TIMSS 2019 بالنظر إلى الشكل المرسوم ناتج كل مما يلي : مساوٍ للصفر ما عدا



أ) $٢ \times ب$

ب) $٢ \times ج$

ج) $٢ \times د$

د) $ب \times ج$



التحميل من
موقع مدرستي

www.school-kw.com

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

الإزاحة في المستوى الإحداثي Translation in a Coordinate Plane

٢-٧

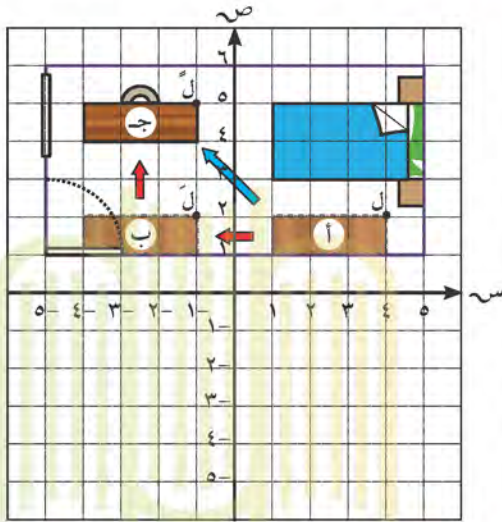
سوف تتعلم : رسم الإزاحة في المستوى - كتابة قاعدة الإزاحة .

العبارات والمفردات :

الإزاحة

Translation

نشاط :



أراد راشد أن يعيد تنظيم غرفته
(كما في الشكل) فحرك مكتبه من الوضع
أ إلى الوضع ب وانتهى به إلى الوضع
ج . صف التغير الذي أجراه راشد على
مكتبه ، وأكمل ما يلي :
إذا كانت ل (٢ ، ٤) إحدى نقاط المكتب
فإن :

١ ل (٢ ، ٤) ← ل (..... ، ١ -)

٢ ل (١ - ،) ← ل (..... ، ١ -)

ل (٢ ، ٤) ← ل (..... ، ١ -)

لاحظ التغير في كل من الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لكل نقطة مع صورتها .

٣ ل (٢ ، ٤) ← ل (..... + ٤ ، + ٢)

٤ هل يمكنك أن تعين صورة أي نقطة من نقاط المكتب وفق القاعدة :

(س ، ص) ← (س + ، ص +) ؟

٥ هل تغيرت أبعاد المكتب خلال إزاحته من الوضع أ إلى ب ثم إلى ج ؟

الإزاحة هي : تحويل هندسي يسمح لنا بالحصول على صورة أي شكل من خلال
نقل كل نقطة فيه مسافة ثابتة على خط مستقيم وفي اتجاه محدد ،
ولا تغير الإزاحة من الشكل وقياساته .

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

وتكون الإزاحة في اتجاه محوري الإحداثيات وفق الجدول التالي :

صورة النقطة تحت تأثير الإزاحة	النقطة
الإزاحة إلى أعلى بمقدار (ب) وحدة (س، ص + ب)	الإزاحة جهة اليمين بمقدار (ب) وحدة (س + ب، ص)
الإزاحة إلى أسفل بمقدار (ب) وحدة (س، ص - ب)	الإزاحة جهة اليسار بمقدار (ب) وحدة (س - ب، ص)

عمومًا:

$$(س، ص) \leftarrow (س + ب، ص \pm ب)$$

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

تدرب (١)

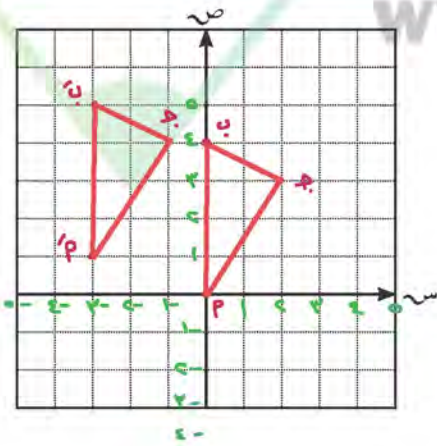
أوجد صورة النقطة $P(5, 3)$ تحت تأثير إزاحة ٤ وحدات إلى اليمين، ثم وحدتين ونصف إلى الأسفل.

$$\begin{aligned} \text{القاعدة: } (س، ص) &\leftarrow (س + ٤، ص - \frac{١}{٢}) \\ P(5, 3) &\leftarrow P(9, 2.5) \\ P(9, 2.5) &\leftarrow P(9, 1) \end{aligned}$$

تدرب (٢)

في المستوى الإحداثي، ارسم المثلث P ب ج الذي رؤوسه هي $P(0, 0)$ ، $B(4, 0)$ ، $C(3, 2)$ ثم ارسم صورة المثلث P ب ج تحت تأثير إزاحة قاعدتها:

$$\begin{aligned} (س، ص) &\leftarrow (س - ٣، ص + ١) \\ P(0, 0) &\leftarrow P(-٣، ١) \\ B(4, 0) &\leftarrow B(١، ١) \\ C(3, 2) &\leftarrow C(٠، ٣) \end{aligned}$$



مثال :

إذا كانت مَ (٥، ٣-) هي صورة النقطة م (١، ٢) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، أوجد قاعدة الإزاحة ثم تحقق من صحتها :
(س ، ص) ← (س + ١ ، ص + ١)

الحل : نعلم أن قاعدة الإزاحة هي : م (١، ٢) ← مَ (٢+١، ١+٢)

$$\therefore \text{م (١، ٢)} \leftarrow \text{مَ (٥، ٣-)}$$

(الإحداثي الصادي)

$$\begin{aligned} ٥ &= ب + ١ \\ ١ - ٥ &= ب \\ ٤+ &= ب \end{aligned}$$

٥ وحدات للأعلى

(الإحداثي السيني)

$$\begin{aligned} ٣- &= ١+ ٢ \\ ٢ - ٣- &= ١ \\ ٥- &= ١ \end{aligned}$$

٥ وحدات لليساار

$$(س ، ص) \leftarrow (س - ٥ ، ص + ٤)$$

$$\text{التحقق: (١، ٢)} \leftarrow (٤+١، ٥-٢)$$

$$\therefore (١، ٢) \leftarrow (٥، ٣-)$$

تم تكميل الحل من
موقع مدرستي

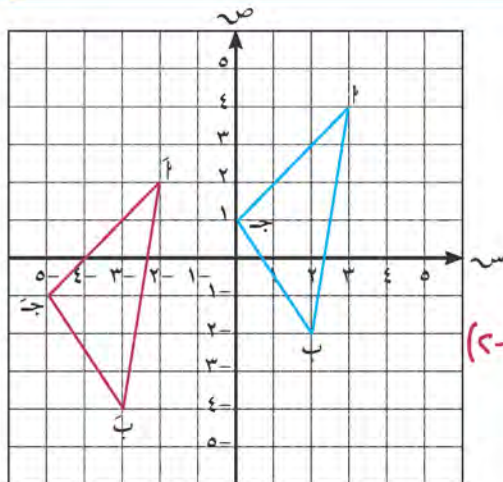
School-kw.com

تدرّب (٣) : أكمل الجدول التالي :

القاعدة	(س ، ص) ← (س + ٣ ، ص - ٢)	(س ، ص) ← (س - ٤ ، ص + ٣)	(س ، ص) ← (س + ١ ، ص - ٥)	(س ، ص) ← (س - ٤ ، ص + ٣)
النقطة	(٣ ، ٤-)	(٣- ، ٠)	(٤- ، ٣-)	(٥ ، ١-)
الصورة	(١ ، ١-)	(٥- ، ٣-)	(٦- ، ٠)	(٣ ، ٢)

تمرّن :

١ أوجد صورة النقطة (٤ ، ٣-) تحت تأثير إزاحة ٣ وحدات إلى اليمين ووحدين إلى الأعلى . (١-٤٧)



٢ أ صف الإزاحة التي تنقل المثلث

ب ج إلى المثلث أ ب ج ، ثم
اكتب القاعدة بصورة رمزية .

٥ وحدات إلى اليمين

٥ وحدات إلى الأسفل

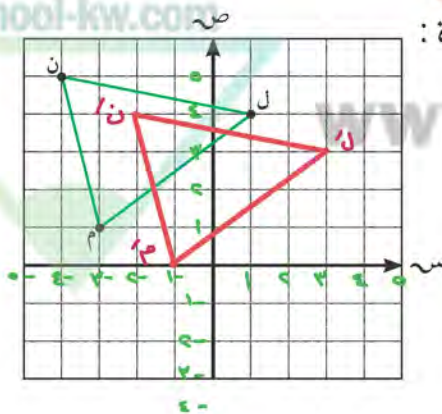
$$(س ، ص) \leftarrow (س - ٥ ، ص + ٥)$$

ب) في التمرين السابق ، اكتب إحداثيي رؤوس Δ ب ج ، ثم أوجد صورة كل منها تحت تأثير إزاحة قاعدتها : (س ، ص) \leftarrow (س + ١ ، ص - ٢)

$$\begin{aligned} P(3, 4) &\leftarrow P'(4, 4) \\ B(2, 2) &\leftarrow B'(3, 2) \\ G(1, 0) &\leftarrow G'(2, 0) \end{aligned}$$

٣ إذا كانت م (٢، ٣-) هي صورة م (٢، ٣-) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، فاكتب القاعدة بصورة رمزية لهذه الإزاحة ثم تحقق من صحتها .

$$\begin{aligned} (س، ص) &\leftarrow (س - ١، ص + ٣) \\ ٣(١، ٢-) &\leftarrow ٣(٢، ٣-) = (٣، ٦-) \end{aligned}$$



٤ ارسم صورة المثلث ل م ن بإزاحة حسب القاعدة :

$$\begin{aligned} (س، ص) &\leftarrow (س + ٢، ص - ١) \\ L(1, 2) &\leftarrow L'(3, 1) \\ M(1, 1) &\leftarrow M'(3, 0) \\ N(2, 3-) &\leftarrow N'(4, 2-) \end{aligned}$$

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

الدوران في المستوى الإحداثي Rotation in a Coordinate Plane

٣-٧



سوف تتعلم: الدوران في المستوى وقواعده، كيفية إيجاد صورة شكل هندسي بالدوران.

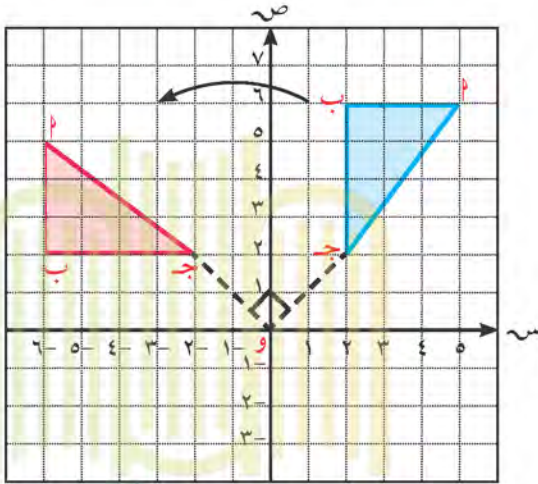
نشاط (١):



العبارات والمفردات:

الدوران

Rotation



تم رسم Δ $أ ب ج$ على شبكة المستوى الإحداثي.

١ ثبت ورقة شفافة على المستوى وقم برسم Δ $أ ب ج$ والمحاور على الورقة الشفافة.

٢ ثبت سن دبوس عند النقطة (و) وقم بتدوير الورقة الشفافة في اتجاه ضد حركة عقارب الساعة حتى ينطبق محور السينات في الورقة الشفافة على محور الصادات في المستوى الأصلي.

لنحصل على موضع جديد للمثلث $أ ب ج$ وليكن Δ $أ ب ج$.

• بم نسمي التحويل الهندسي الذي ينقل Δ $أ ب ج$ إلى Δ $أ ب ج$ ؟

نسمي التحويل الهندسي السابق بالدوران، والذي ينتج عنه تدوير شكل ما حول نقطة نسميها مركز الدوران، ولا يغير الدوران من الشكل أو قياساته.

معلومات مقيمة:

يستخدم النجارون المخاريط الدورانية لخلق تصميمات متناظرة (متماثلة).



الدوران: هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة $أ$ في المستوى

نقطة أخرى $أ'$ بحيث $أ \rightarrow أ'$ ، و $أ = أ'$ (و تسمى مركز الدوران) و (نقطة صامدة)، ($\hat{أ}$ و $\hat{أ'}$) هي زاوية الدوران وقياسها $هـ^\circ$.

نرمز إلى الدوران الذي مركزه نقطة الأصل (و) وقياس زاويته ($هـ^\circ$) بالرمز $د(و، هـ^\circ)$.

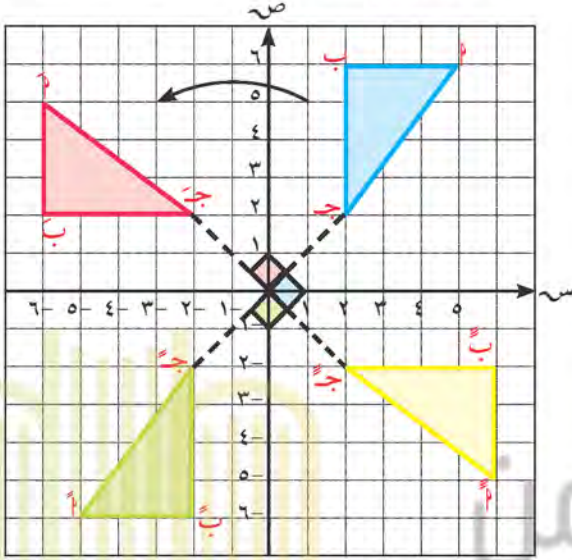
• يتعين الدوران بثلاثة عناصر:

(١) مركز الدوران (٢) قياس زاوية الدوران (٣) اتجاه الدوران

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com



أكمل من النشاط السابق وباستخدام الورقة الشفافة دوّر وارسم صورة Δ أ ب ج :



- أ حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها 90° ضد اتجاه حركة عقارب الساعة د (و ، 90°) .
- ب حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها 180° ضد اتجاه حركة عقارب الساعة د (و ، 180°) .
- ج حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها 270° ضد اتجاه حركة عقارب الساعة د (و ، 270°) .
- د أكمل الجدول التالي مستعينًا بالرسم :

الدوران	الرؤوس	أ (٥، ٦)	ب (٢، ٦)	ج (٢، ٢)
د (و ، 90°)	أ (٥، ٦-)	ب (٢-، ٦)	ج (٢-، ٢)	
د (و ، 180°)	أ (٥-، ٦-)	ب (٢-، ٢-)	ج (٢-، ٢-)	
د (و ، 270°)	أ (٥-، ٦)	ب (٢-، ٦-)	ج (٢، ٢-)	

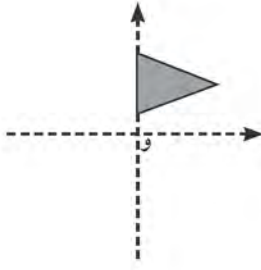
تذكر أن :

الدورة الكاملة يكون قياس زاويتها 360° .

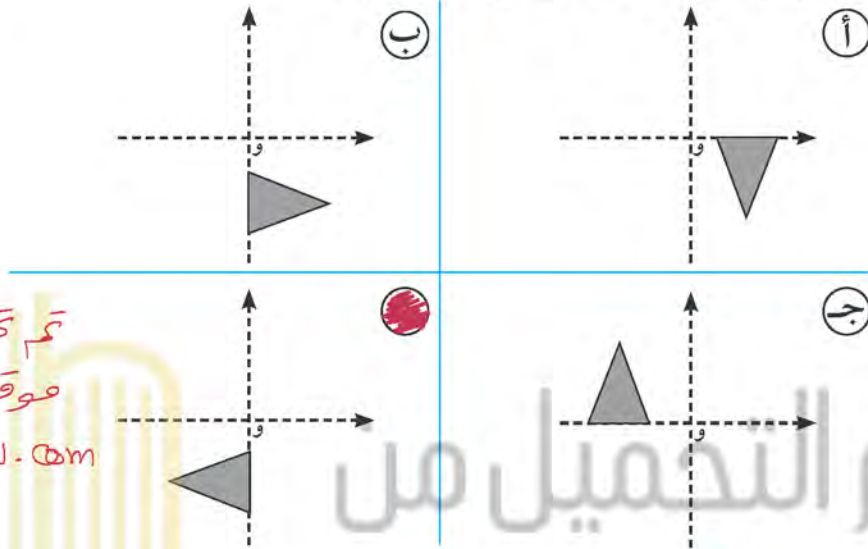
مما سبق نستنتج أن :

- أ (س ، ص) $\xrightarrow{د (و ، 90^\circ)}$ (ص ، س) يسمى دوران ربع دورة ($\frac{1}{4}$ دورة) .
- ب (س ، ص) $\xrightarrow{د (و ، 180^\circ)}$ (ص ، س) يسمى دوران نصف دورة ($\frac{1}{2}$ دورة) .
- ج (س ، ص) $\xrightarrow{د (و ، 270^\circ)}$ (ص ، س) يسمى دوران $\frac{3}{4}$ دورة .

تدرّب (١) :



أي الأشكال التالية يظهر نتيجة دوران الشكل نصف دورة باتجاه عقارب الساعة حول النقطة و؟



تمّ تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

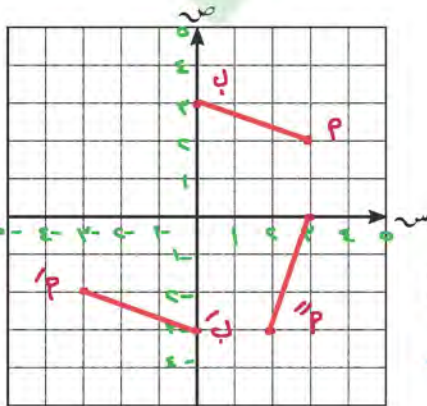
فكر وناقش



يقول عبدالله :
إنّ الدوران د (و، ١٨٠°) يكافئ الانعكاس في نقطة الأصل .
هل توافقه الرأي؟ فسر إجابتك . نعم ، **عني بالعين يتغير الاتجاهان**

العين وإصداي الى معكوهي الجص

تدرّب (٢) :



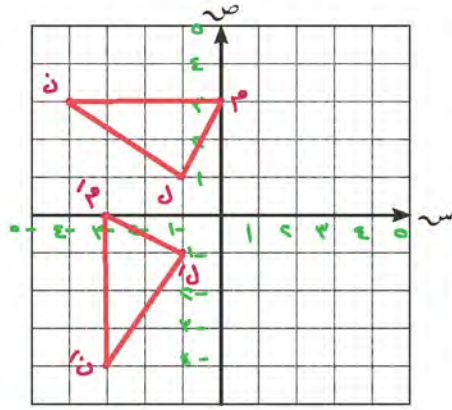
ارسم \overline{AB} التي فيها $P(2, 3)$ ، $B(3, 0)$
ثم عين وارسم صورتها تحت تأثير كل من:

- أ د (و، ١٨٠°)
 $P(2, 3) \rightarrow P'(-2, -3)$ د (و، ١٨٠°)
 $B(3, 0) \rightarrow B'(-3, 0)$ ب (و، ١٨٠°)
 $P(2, 3) \rightarrow P''(-3, -2)$ ب (و، ١٨٠°)
 $B(3, 0) \rightarrow B''(0, -3)$

ب د (و، ٢٧٠°)

- $P(2, 3) \rightarrow P'''(2, 3)$ د (و، ٢٧٠°)
 $B(3, 0) \rightarrow B'''(3, 0)$ ب (و، ٢٧٠°)
 $P(2, 3) \rightarrow P''''(3, 2)$ ب (و، ٢٧٠°)
 $B(3, 0) \rightarrow B''''(0, 3)$

تدرّب (٣)

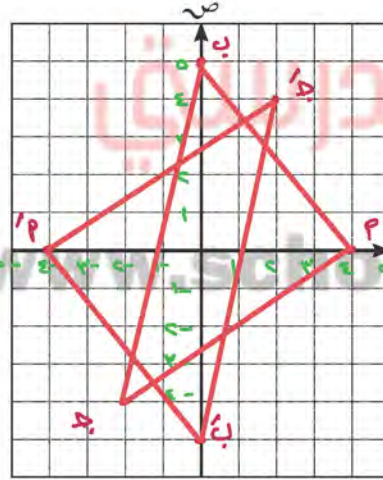


في المستوى الإحداثي ارسم المثلث ل م ن بحيث ل (١، ١-) ، م (٣، ٠) ، ن (٣، ٤-) ، ثم ارسم صورته بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته 90° .

- ل (١ ، ١-) د (٠، ٩٠°) ل (١- ، ١-)
 م (٣ ، ٠-) م (٣ ، ٠-)
 ن (٣ ، ٤-) ن (٣- ، ٤-)

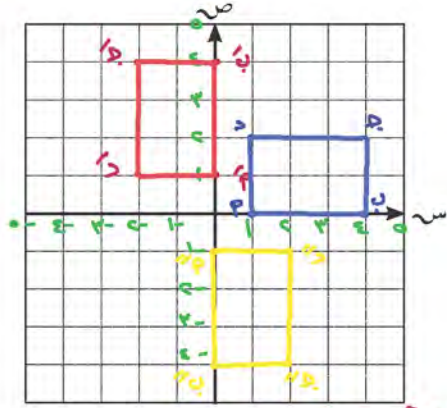
تمرّن :

- ١ ارسم صورة المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ (٠، ٤) ، ب (٥، ٠) ، ج (٤، -٢) بدوران نصف دورة حول نقطة الأصل .



- أ (٠، ٤) أ' (٠، -٤)
 ب (٥، ٠) ب' (-٥، ٠)
 ج (٤، -٢) ج' (-٤، ٢)

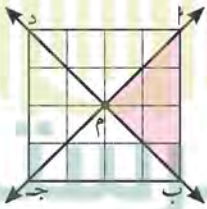
تمّ تكميل الحل من
 موقع مدرستي
 School-kw.com



٢ ارسم المستطيل $أ ب ج د$ الذي رؤوسه $أ(٠، ١)$ ، $ب(٠، ٤)$ ، $ج(٢، ٤)$ ، $د(٢، ١)$ ، ثم ارسم صورته في الحالات التالية :

- ٤
- أ دوران ٩٠° حول $أ(٠، ١)$ $أ(١، ٠)$
- ب دوران ٩٠° حول $ب(٠، ٤)$ $ب(٤، ٤)$
- ج دوران ٩٠° حول $ج(٢، ٤)$ $ج(٢، ٠)$
- د دوران ٩٠° حول $د(٢، ١)$ $د(١، ٢)$
- ب دوران ٢٧٠° حول $أ(٠، ١)$ $أ(١، ٠)$
- ب دوران ٢٧٠° حول $ب(٠، ٤)$ $ب(٤، ٤)$
- ج دوران ٢٧٠° حول $ج(٢، ٤)$ $ج(٢، ٠)$
- د دوران ٢٧٠° حول $د(٢، ١)$ $د(١، ٢)$

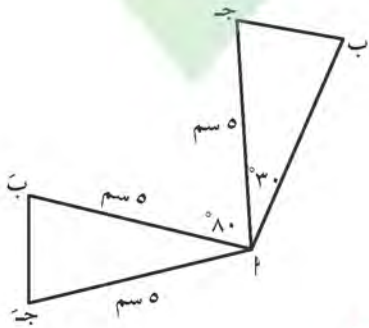
تم التمارين (٣ - ٤) اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :



٣ في الشكل المقابل : صورة $\Delta م ب ج$ تحت تأثير دوران ٢٧٠° هي :

- أ $\Delta د م ج$
- ب $\Delta م ج د$
- ج $\Delta د م أ$
- د $\Delta م أ ب$

٤ المثلث $أ ب ج$ هو صورة المثلث $أ ب ج$ بدوران حول $أ$ ، قياس زاويته =



- أ 30°
- ب 80°
- ج 110°
- د 140°

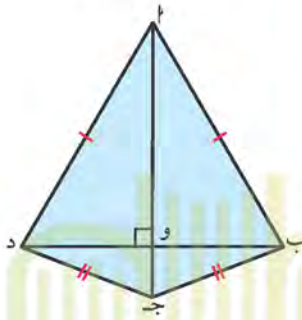
تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

مراجعة الوحدة السابعة Revision Unit Seven

٤-٧

١ أي الأشكال التالية متناظر حول نقطة مُلتقى قُطريه (أقطاره)؟ ولماذا؟

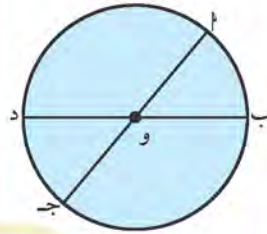
(طائرة ورقية)



لا

القطران لا ينصف
كل منهما الآخر

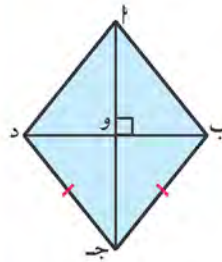
(دائرة)



نعم

لأن (و) هي منتصف
أقطار الدائرة كافة

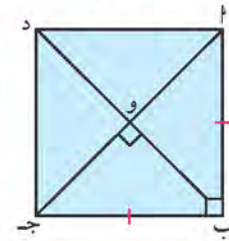
(معين)



نعم

القطران ينصف
كل منهما الآخر

(مربع)

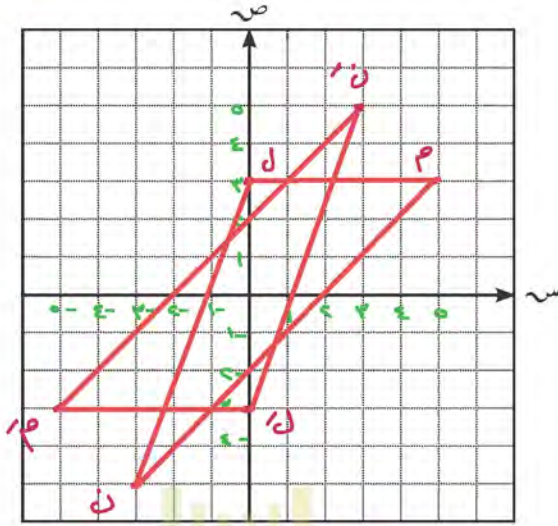


نعم

القطران ينصف
كل منهما الآخر

٢ أكمل الجدول التالي :

نقطة الأصل	صورتها بالانعكاس في المحور السيني	صورتها بالانعكاس في المحور الصادي	صورتها بالانعكاس في النقطة
(٥-، ٤-)	(٥، ٤-)	(٥-، ٤)	٢ (٥، ٤)
(٧-، ٢)	(٧، ٢)	(٧-، ٢-)	ب (٧، ٢-)
(٦، ٥)	(٦-، ٥)	(٦، ٥-)	ج (٦-، ٥-)
(٩-، ٠)	(٩، ٠)	(٩-، ٠)	د (٩، ٠)
(٠، ٥)	(٠، ٥)	(٠، ٥-)	هـ (٠، ٥-)



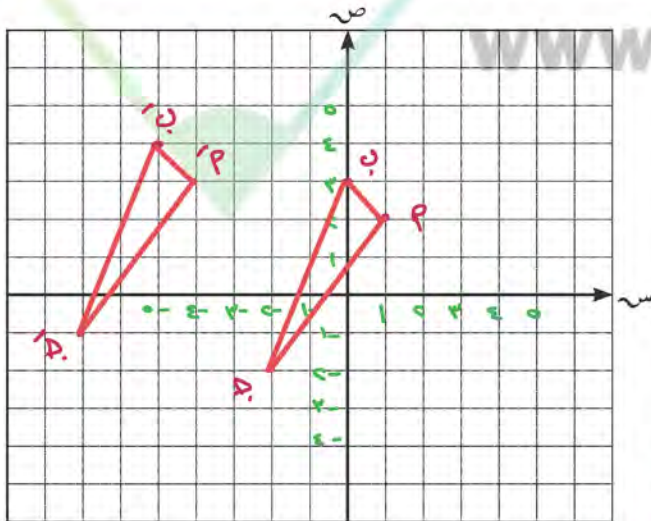
٣ إذا كان المثلث ل م ن هو صورة المثلث ل م ن بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت ل (٣ ، ٠) ، م (٣ ، ٥) ، ن (٥ ، ٣ -) ، فعيّن إحداثيات الرؤوس ل' ، م' ، ن' ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .

ل (٣ ، ٠) ← ل' (٣ - ، ٠)
 م (٣ ، ٥) ← م' (٣ - ، ٥ -)
 ن (٥ ، ٣ -) ← ن' (٥ ، ٣)

٤ أكمل الجدول التالي :

القاعدة	(س ، ص) ← (س - ٢ ، ص + ٥)			
النقطة	(٢ ، ٤)	(٧- ، ٦-)	(٠ ، ٣)	(٨- ، ٩-)
الصورة	(٧ ، ٢)	(١٢ ، ٨-)	(٥ ، ١)	(٣- ، ١١-)

school-kw.com



٥ مثلث أ ب ج رؤوسه هي :

(٢ ، ١) ، (٣ ، ٠) ، (٢ - ، ٢ -)

أوجد صور رؤوسه بعد الإزاحة تبعاً للقاعدة :

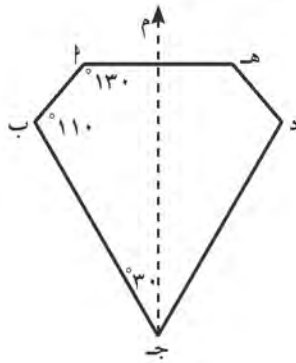
(س ، ص) ← (س - ٥ ، ص + ١) ،
 ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .

أ (٢ ، ١) ← أ' (٣ ، ٤ -)
 ب (٣ ، ٠) ← ب' (٤ ، ٥ -)
 ج (٢ - ، ٢ -) ← ج' (١ - ، ٧ -)

تم تحميل الحل من موقع
 مدرسين

School-kw.com

٦ إذا كان م محور تناظر للشكل المرسوم، فإنَّ قياس (ب ج د) =



- أ ٣٠
 ب ٥٠
 ج ٦٠
 د ٧٠

٧ تم التأثير بتحويل هندسي على المثلث ا ب ج فكان :

- للنقطة ا (٢، ٣) صورة هي د (٠، ٢) ،
 للنقطة ب (١، ٤) صورة هي هـ (١، ٥) ،
 للنقطة جـ (٢، ١) صورة هي لـ (٤، ٢) .

١ هل المثلث د هـ ل هو إزاحة للمثلث ا ب ج ؟

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

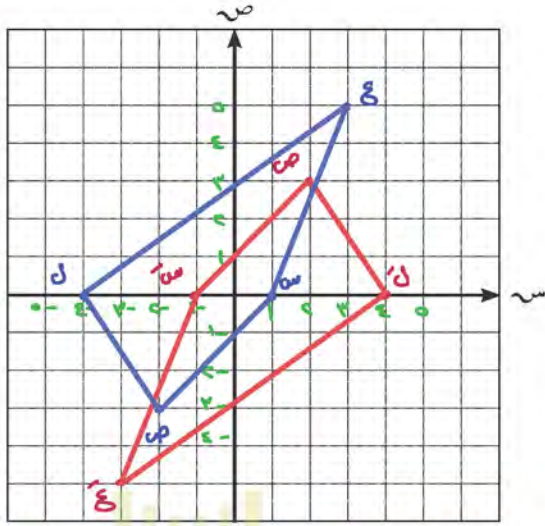
ب إذا كان كذلك ، فما هي قاعدة هذه الإزاحة ؟ وإذا لم يكن كذلك فيبين السبب .

(س ، ص) ← (س - ٢ ، ص + ١)

www.school-kw.com

٨ أكمل الجدول التالي :

النقطة	د (و، ٩٠°)	د (و، ١٨٠°)	د (و، ٢٧٠°)
ا (٢، ٥)	(٠، ٥)	(٠، ٥)	(٠، ٥)
ب (٣، ٤)	(٣، ٤)	(٤، ٣)	(٤، ٣)
جـ (١، ٧)	(١، ٧)	(٧، ١)	(٧، ١)
د (٠، ٦)	(٠، ٦)	(٦، ٠)	(٦، ٠)



٩ ارسم صورة الشكل الرباعي من ص ع ل ،

حيث س (٠، ١) ، ص (٣، ٢) ،

ع (٥، ٣) ، ل (٠، ٤) بالدوران حول

نقطة الأصل وبزاوية قياسها 180° .

س (٠، ١) دوران 180° س' (٠، ١)

ص (٣، ٢) دوران 180° ص' (٣، ٢)

ع (٥، ٣) دوران 180° ع' (٥، ٣)

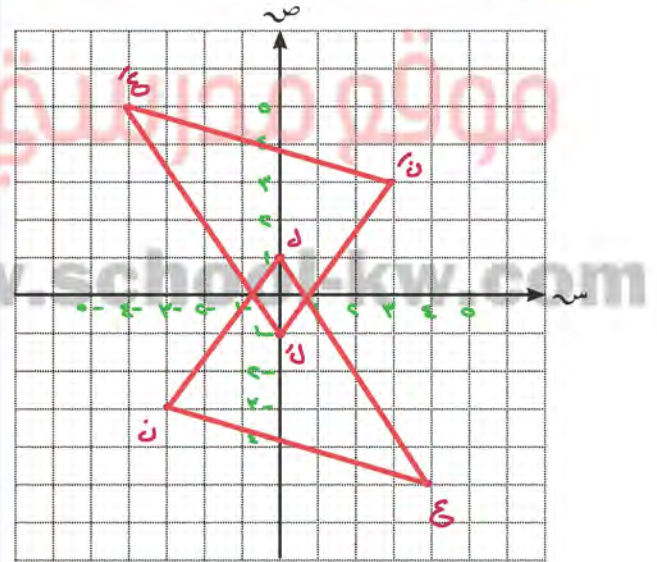
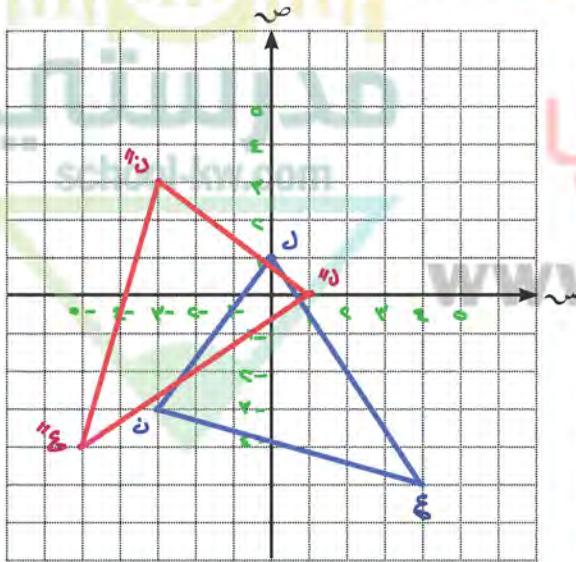
ل (٠، ٤) دوران 180° ل' (٠، ٤)

١٠ ارسم Δ ن ل ع حيث ن (٣، ٣) ، ل (١، ٠) ، ع (٥، ٤) ، ثم عين صورته تحت

تأثير كل من :

أ د (و، 180°)

ب د (و، 270°)



ن (٣، ٣) دوران 270° ن' (٣، ٣)

ل (١، ٠) دوران 270° ل' (١، ٠)

ع (٥، ٤) دوران 270° ع' (٥، ٤)

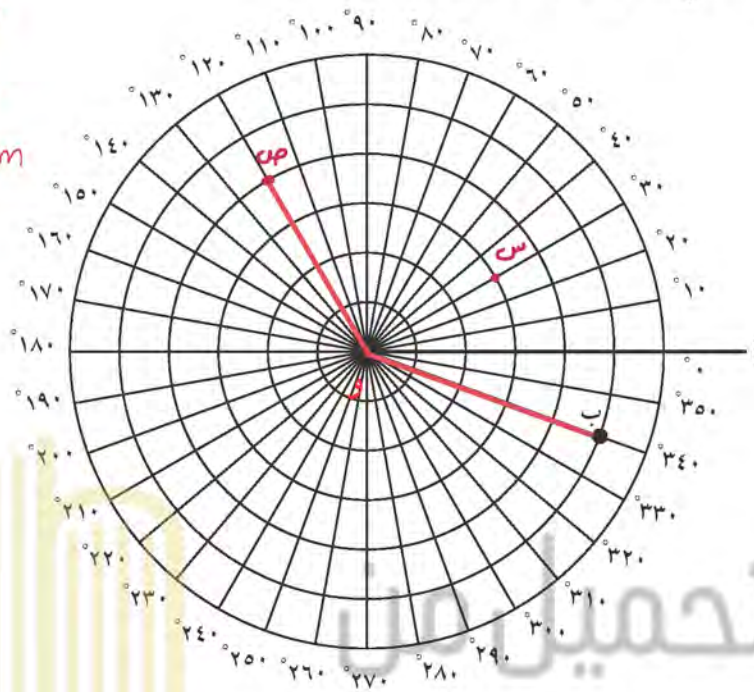
ن (٣، ٣) دوران 180° ن' (٣، ٣)

ل (١، ٠) دوران 180° ل' (١، ٠)

ع (٥، ٤) دوران 180° ع' (٥، ٤)

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

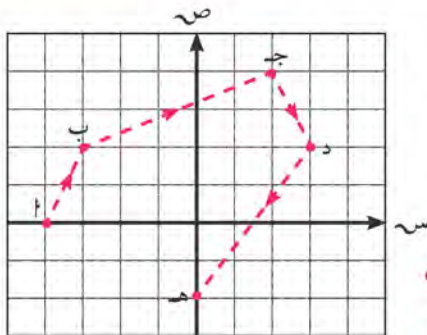
تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com



في هذا النظام يوصف النقطة (ب) بمسافة البعد عن المنشأ (و) . ومقدار اللفة عكس عقارب الساعة من خط الأساس (و) إلى (ب) وبالتالي إحداثيات ب هي (٥ ، ٣٤٠) .
أ عين النقاط س (٣ ، ٣٠) ، ص (٤ ، ١٢٠) على الرسم البياني أعلاه .

ب ارسم الزاوية ب و ص ؟ ما هو قياس الزاوية ب و ص ؟

١٤٠



١٢ تحركت سفينة من الميناء (ب) مرورًا ببعض الموانئ إلى أن وصلت في نهاية رحلتها إلى الميناء (هـ) ، صف الإزاحة التي يمكن أن تتحركها السفينة من ميناء إلى آخر بدءًا من الميناء (ب) .

(أ) إلى (ب) وحدة إلى اليمين ووحدة إلى الأعلى

(ب) إلى (ج) ٥ وحدات إلى اليمين ووحدة إلى الأعلى

(ج) إلى (د) وحدة إلى اليمين ووحدة إلى الأسفل

(د) إلى (هـ) ٣ وحدات إلى اليسار و٤ وحدات إلى الأسفل

اختبار الوحدة السابعة

أولاً: في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١	<input checked="" type="radio"/>	المربع متناظر حول نقطة مُلتقى قطريه .	(ب)
٢	<input checked="" type="radio"/>	صورة النقطة م (٣، ٥) بالدوران 90° حول نقطة الأصل في اتجاه ضد عقارب الساعة هي م' (٥، ٣) .	(أ)
٣	<input checked="" type="radio"/>	صورة النقطة م (٣، ٢) بانعكاس في نقطة الأصل يكافئ إزاحة حسب القاعدة (س - ٤ ، ص - ٦) .	(ب)
٤	<input checked="" type="radio"/>	في الشكل المقابل الشكل متناظر حول نقطة تلاقي قطريه .	(أ)

ثانياً: لكل بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة :

٥ ن (١، ٧) صورة ن (٢، ١) تحت تأثير:
 (أ) انعكاس في المحور السيني
 (ب) د (و، 270°)
 (ج) انعكاس في نقطة إزاحة إلى اليمين
 (د) ٥ وحدات

٦ قياس الدرجة التي تمثل $\frac{1}{4}$ دورة كاملة ضد عقارب الساعة تساوي :

(أ) 90° (ب) 180° (ج) 270° (د) 360°

٧ صورة النقطة ع (٢-، ٤-) بالانعكاس في نقطة الأصل (و) هي :

(أ) (٤-، ٢) (ب) (٤، ٢-) (ج) (٤، ٢) (د) (٢، ٤)

٨ صورة النقطة هـ (١-، ٤-) باستخدام قاعدة الإزاحة

(س، ص) ← (س + ٥ ، ص - ٤) هي :

(أ) هـ (٣، ١) (ب) هـ (٥، ١) (ج) هـ (٥، ٩) (د) هـ (٥، ٩)

تم تحميل الملف من موقع
مدرستي

School-kw.com

٩ الانعكاس في نقطة الأصل يكافئ :

أ) د(و، ٩٠°) ب) د(و، ١٨٠°) ج) د(و، ٢٧٠°) د) د(و، ٣٦٠°)

١٠ إذا كانت مَ (٩، ٥-) هي صورة النقطة م (٥، ٢) تحت تأثير إزاحة في المستوى

الإحداثي، فإن قاعدة هذه الإزاحة هي :

أ) (س، ص) ← (س + ٧، ص - ٤) ب) (س، ص) ← (س - ٧، ص + ٤)

ج) (س، ص) ← (س + ٧، ص + ٤) د) (س، ص) ← (س - ٧، ص - ٤)



تم التحميل من

موقع مدرستي

تم تحميل الحل من

موقع مدرستي

School-kw.com

الأشكال الرباعية Quadrilaterals

الوحدة الثامنة

تصاميم هندسية Geometric Designs



مشروع الوحدة :
(تصميم هندسي)



عمليات التصميم الهندسي هي مجموعة من الخطوات التي تتم من أجل إخراج منتج جديد أو نظام جديد .

تم التحميل من

خطة العمل :

• توظيف أشكال رباعية لتكوين تصاميم هندسية متنافسة ومميزة .

خطوات تنفيذ المشروع :

• في تصميمك ارسم أشكالاً رباعية (مستخدماً

شبكة المربعات ، أدوات هندسية) .

• ضمّن في تصميمك كل أنواع متوازيات الأضلاع

(مستطيل ، معين ، مربع) .

• حدد الأشكال الرباعية المستخدمة في التصميم ،

وحلّل خواصها من حيث (التطابق ، والتماثل ، ... إلخ) بإكمال الجدول .

• استخدم أكثر عدد ممكن من الأشكال الرباعية لتكوّن التصميم .

علاقات وتواصل :

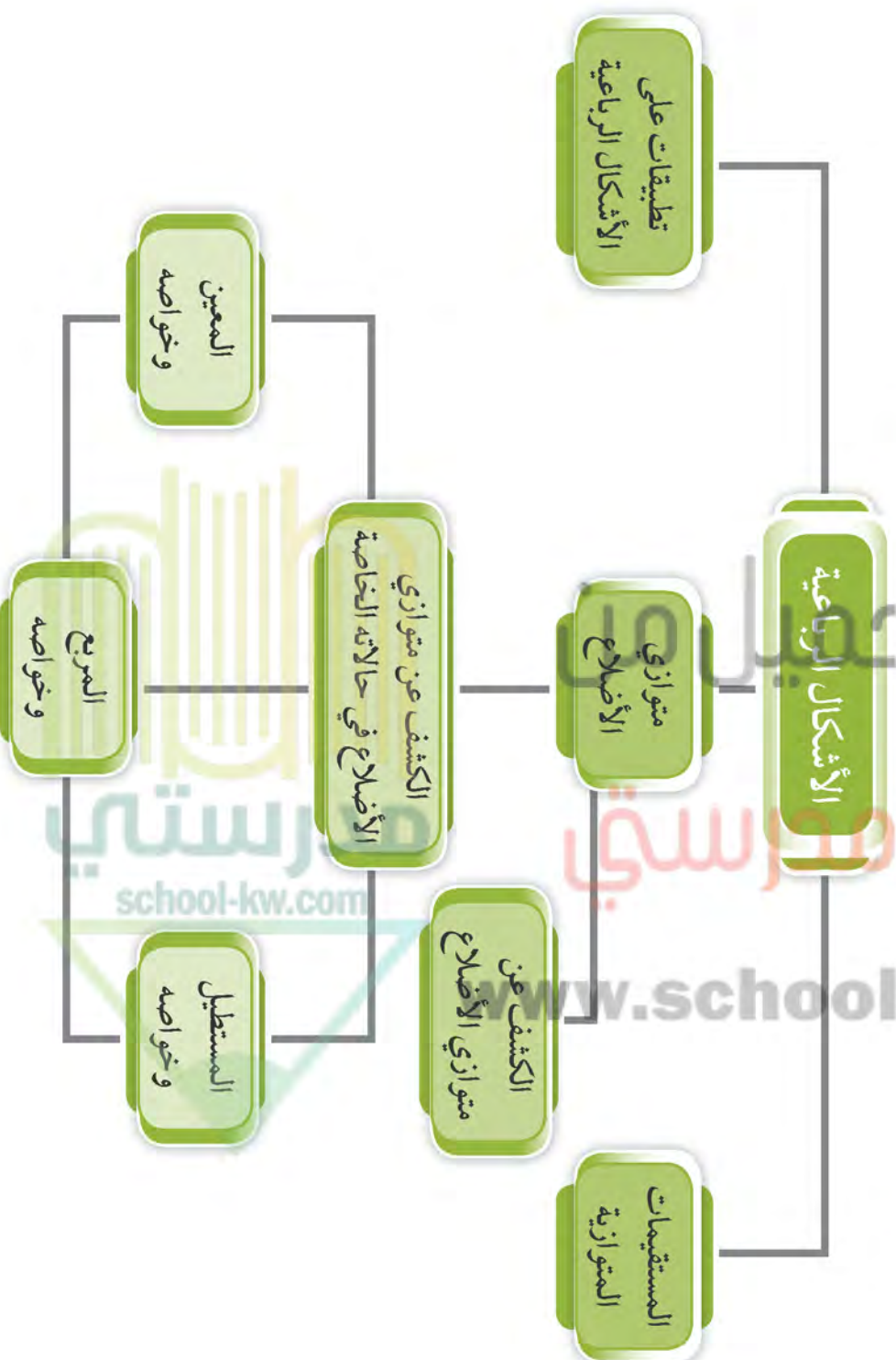
• المجموعة الواحدة تصمم عدة تصاميم هندسية ويتم اختيار الأفضل .

عرض العمل :

• كل مجموعة تعرض التصميم النهائي مع الجدول المستخدم .

خواص		اسم الشكل الرباعي		
تماثل	خواص			
حول نقطة	حول محور	الأقطار	الزوايا	الأضلاع

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



المستقيمات المتوازية Parallel Lines

١-٨



سوف تتعلم : العلاقة بين الزوايا الناتجة من قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين .



تسمى الخطوط المستقيمة التي تقع في مستوى واحد ولا تتقاطع أبدًا بالخطوط المتوازية .

العبارات والمفردات :

Parallel متوازي
زوايا متبادلة

Alternate Angles

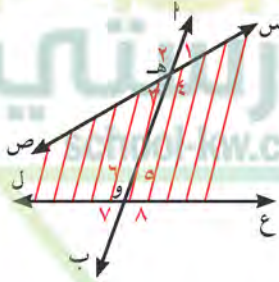
زوايا متناظرة

Corresponding Angles

زوايا متحالفة

Allied Angles

الرسم	تقرأ	تكتب بالرموز
	المستقيم (أ ب) يوازي المستقيم (ج د)	أ ب // ج د



نشاط :

أكمل ما يلي : عندما يقطع مستقيم مستقيمين

تنتج زوايا عددها

من هذه الزوايا زوايا متبادلة وزوايا

متناظرة ، متخالفة ، متقابلة بالرأس ، متجاورة

أكمل الجدول التالي مستعينًا بالشكل المرسوم :

داخليًا	٦،٤ - ٥،٣	أزواج من الزوايا المتبادلة
خارجيًا	٨،٢ - ٧،١	
	١،٥ - ٦،٣ - ٧،٤ - ٨،٢	أزواج من الزوايا المتناظرة
	٥،٣ - ٦،١	أزواج من الزوايا المتحالفة
	١،٥ - ٦،٣ - ٧،٤ - ٨،٢	أزواج من الزوايا المتقابلة بالرأس
	١،٥ - ٦،٣ - ٧،٤ - ٨،٢ ١،٥ - ٦،٣ - ٧،٤ - ٨،٢	أزواج من الزوايا المتجاورة

معلومات مفيدة :

- في صناعة النسيج
تكون الخيوط
متوازية ومتعامدة
على النول .



ربط الأفكار : إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ، فإن :

كل زاويتين متحالفتين متكاملتان	كل زاويتين متناظرتين متطابقتان	كل زاويتين متبادلتين متطابقتان
		زوايا متبادلة داخليًا
		زوايا متبادلة خارجيًا

تذكر أن :

- الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما 180°
- الزاويتان المتتامتان مجموع قياسهما 90°

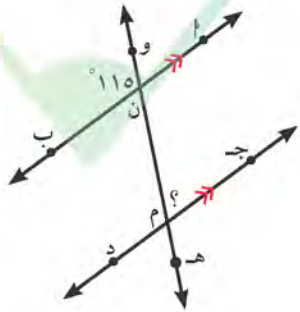
تدرّب (١)

في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة (س) مع ذكر السبب.

بالتناظر والتوازي	بالتعاقب والتوازي	بالتبادل والتوازي	بالتناظر والتوازي

بالتناظر والتوازي

www.school-kw.com



تدرّب (٢)

في الشكل المقابل : $AB \parallel CD$ ، وه قاطع لهما

في ن ، م على الترتيب ، $\hat{N} = \hat{O} = 115^\circ$.

فأكمل لتوجد بالبرهان \hat{M} (ج م ن) .

المعطيات : (١) $AB \parallel CD$ ، وه قاطع لهما

(٢) $\hat{N} = \hat{O} = 115^\circ$

المطلوب : إيجاد \hat{M} (ج م ن)

البرهان : $AB \parallel CD$ ، وه قاطع لهما (معطى)

$\hat{N} = \hat{O} = 115^\circ$ (معطى)

$\hat{N} = \hat{M} = \hat{O} = 115^\circ$ (بالتوازي والتناظر)

$\hat{M} = \hat{N} = 115^\circ - 180^\circ = 65^\circ$ (ج م ن)

لأن $\hat{M} = \hat{N}$ ، ن م د متجاورتان على مستقيم

فكر وناقش

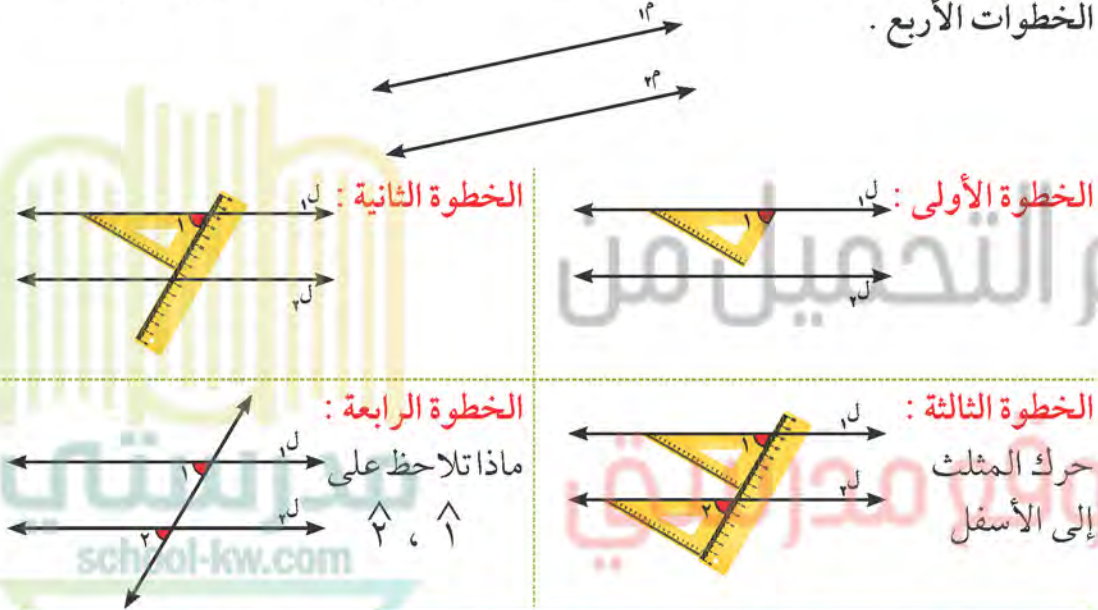


قال عبد الكريم: أستطيع حل تدرّب (٢) السابق بطرق أخرى مختلفة، فهل توافقه الرأي؟ فسّر إجابتك. نعم، مثلاً $\hat{B} = 65^\circ$ بالتبادلية المستقيمة مع \hat{O} ، $\hat{B} = 65^\circ$ بالتبادلية المتوازية.

نشاط (٢):



باستخدام المسطرة والمثلث القائم تحقق من صحة توازي المستقيمين l_1 ، l_2 متبعًا الخطوات الأربع.



نتيجة: إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وتوفرت أحد الشروط التالية:

- (١) زاويتان متبادلتان متطابقتان.
- (٢) زاويتان متناظرتين متطابقتان.
- (٣) زاويتان متحالفتان متكاملتان.

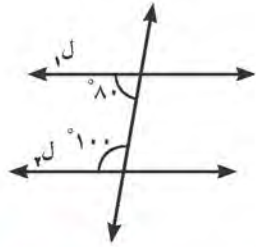
فإن المستقيمين يكونان متوازيين.

إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وكان:

الزاويتان المتحالفتان ٢، ١ متكاملتان	الزاويتان المتناظرتان ٢، ١ متطابقتان	الزاويتان المتبادلتان ٢، ١ متطابقتان
فإن $l_1 \parallel l_2$	فإن $l_1 \parallel l_2$	فإن $l_1 \parallel l_2$

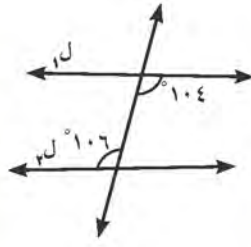
تدرّب (٣) :

في أي من الأشكال التالية يكون المستقيمان $ل$ ، $ل$ متوازيين؟ وضح ذلك .



∴ الزاويتان... **المعتادتان متكاملتان**

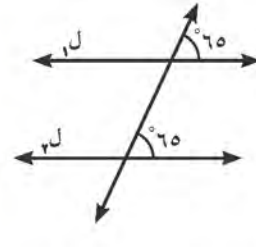
$$\therefore \vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$$



∴ الزاويتان المتبادلتان

غير متطابقتين

$$\therefore \vec{l}_1 \text{ ، } \vec{l}_2 \text{ غير متوازيتين}$$

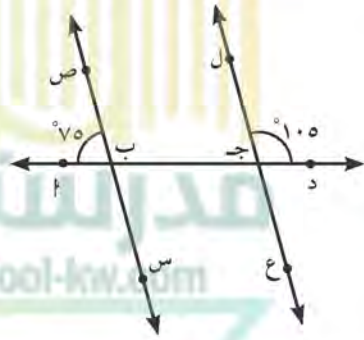


∴ الزاويتان المتناظرتان

متطابقتان

$$\therefore \vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$$

تم التحميل من



في الشكل المقابل $أد$ قاطع للمستقيمين

س ص ، ع ل في ب ، جـ على الترتيب ،

$\angle ب ص = 75^\circ$ ، $\angle ل جـ د = 105^\circ$ ،

برهن أنّ س ص \parallel ع ل .

الحل :

المعطيات : (١) $أد$ قاطع للمستقيمين س ص ، ع ل .

(٢) $\angle ب ص = 75^\circ$ ، $\angle ل جـ د = 105^\circ$

المطلوب : إثبات أنّ س ص \parallel ع ل

البرهان : ∴ $\angle ل جـ د = 105^\circ$ (معطى)

∴ $\angle ب جـ ل = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ (بالتجاور على مستقيم واحد)

∴ $\angle ب ص = 75^\circ$ (معطى)

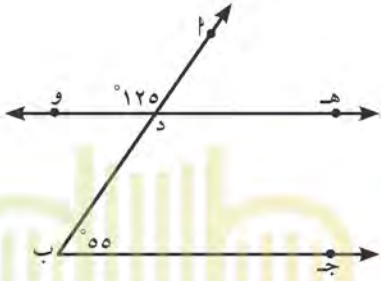
∴ $\angle ب ص = \angle ب جـ ل = 75^\circ$ (وهما في وضع تناظر)

∴ س ص \parallel ع ل

فكر وناقش

قالت نور: أستطيع حل المثال السابق بطرق أخرى، هل توافقها الرأي، فسر إجابتك.

تدرّب (٤)



في الشكل المقابل: $\angle د = 125^\circ$ ،
 $\angle ب = 55^\circ$ ، أثبت أن $هـ \parallel جـ$
 المعطيات: (١) $\angle د = 125^\circ$

(٢) $\angle ب = 55^\circ$

المطلوب: إثبات أن $هـ \parallel جـ$

البرهان: $\therefore \angle د = 125^\circ$ (معطى)

$\therefore \angle هـ د ب = 125^\circ$ (زاويتان متقابلتان بالرأس)

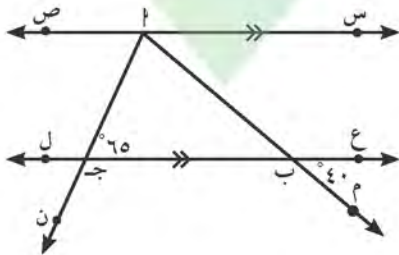
$\therefore \angle هـ د ب + \angle د ب ج = 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ (وهما متحالفتان)

$\therefore هـ \parallel جـ$

هل يوجد لتدرّب (٤) حلول أخرى لإثبات صحة التوازي؟ وضح ذلك.

www.school-kw.com

تمرّن:



١ في الشكل المقابل $س \parallel ع$ ، $\angle ل = 65^\circ$

$\angle م = 40^\circ$ ، $\angle ب = 65^\circ$

أوجد بالبرهان كلاً من:

$\angle ص أ ج$ ، $\angle س أ ب$ ، $\angle ج أ ب$

حل: $\angle ص أ ب = \angle م = 40^\circ$ (زاويتان متقابلتان بالرأس)

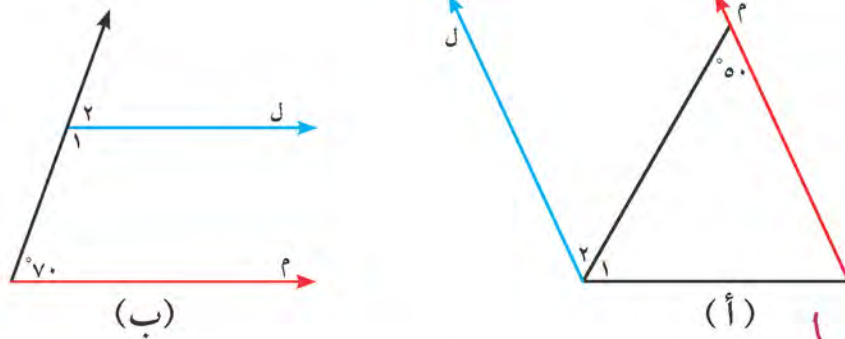
$\angle ب = 65^\circ$ (معطى)

$\angle س أ ب = \angle ب = 65^\circ$ (زاويتان متقابلتان بالرأس)

$\angle ج أ ب = 180^\circ - (\angle س أ ب + \angle ب) = 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ) = 50^\circ$

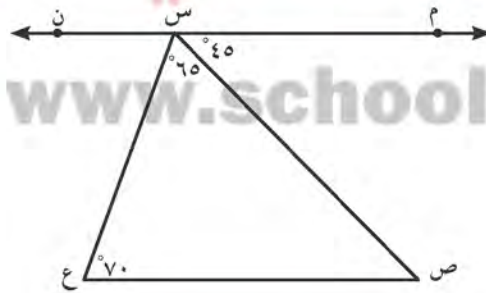
١٨٠

٢ في الشكل (أ)، (ب) ضع قياسًا من عندك لإحدى الزاويتين ١، ٢ أو كليهما لتجعل ل، م متوازيين .



$\hat{C} = 50^\circ$
 $\hat{A} = 110^\circ$ بالتخالف وبتوازي
 $\hat{C} = 70^\circ$ بالتساخ وبتوازي

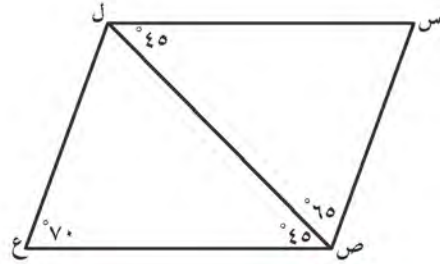
٣ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،
 أثبت أن م ن // ص ع .



$\hat{C} = 180^\circ - (70^\circ + 65^\circ) = 45^\circ$ مجموع قياسات زوايا المثلث 180°
 $\hat{C} = 45^\circ = \hat{M} \hat{S} \hat{N}$ بالتبادل وبتوازي
 إذا م ن // ص ع

٤ في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة عليه ،

برهن أن $\overline{س ل} \parallel \overline{ص ع}$ ، $\overline{س ص} \parallel \overline{ل ع}$.

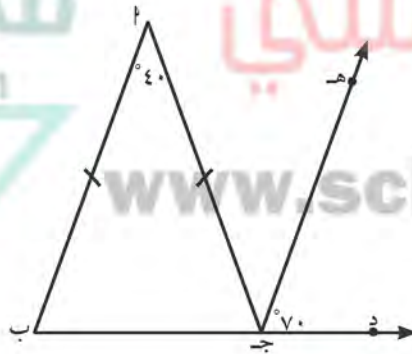


وه (س ل ع) = وه (ل ص ع) = 45° هما في وضع تبادل وتوازي
إذا $\overline{س ل} \parallel \overline{ص ع}$

٥ ل ص ع فيه : وه (ص ل ع) = $180^\circ - 110^\circ - 65^\circ$ مجموع قياسات زوايا مثلث ١٨٠
وه (س ل ع) = وه (ل ص ع) = 65° هما في وضع تبادل
 $\overline{س ص} \parallel \overline{ل ع}$

٥ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،

أثبت أن $\overrightarrow{ج ه} \parallel \overrightarrow{ب پ}$.



$\triangle ب پ ج$ متطابق الضلعين

وه (ب پ ج) = وه (ب ه ج) = $(90^\circ - 40^\circ) = 50^\circ$ ، \therefore \angle

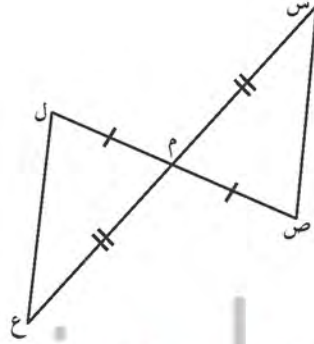
وه (ب پ ج) = وه (ب ه ج) = 50° هما في وضع تناظر وتوازي

$\overrightarrow{ب پ} \parallel \overrightarrow{ج ه}$

٦ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،
أثبت أن :

$$(1) \triangle س م ص \cong \triangle ع م ل$$

$$(2) \overline{س ص} \parallel \overline{ع ل}$$



$\triangle س م ص$ ، $\triangle ع م ل$ **فإنهما**

$$\overline{س م} \cong \overline{ع م} \quad \text{معطى}$$

$$\overline{ص م} \cong \overline{ل م} \quad \text{معطى}$$

$\widehat{س م ص} = \widehat{ع م ل}$ **بالمقابل بالرأس**

$$\triangle س م ص \cong \triangle ع م ل \quad \text{بجاءة (ض ، ز ، ض)}$$

من تطابق المثلثين نستنتج

$$\widehat{س ص م} = \widehat{ع ل م} \quad \text{وهما نقيضين وضع تبادلك}$$

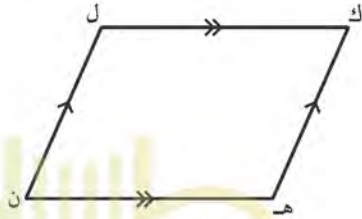
$$\overline{س ص} \parallel \overline{ع ل}$$

متوازي الأضلاع وخواصه Parallelogram and its Properties

٢-٨

سوف تتعلم : خواص متوازي الأضلاع .

تعلمت سابقاً : أن متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .

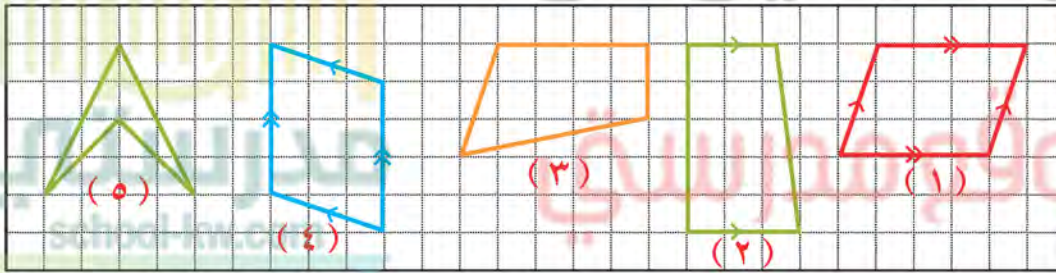


ك ل ن هـ متوازي أضلاع وعلى ذلك :
 $\overline{ك ل} \parallel \overline{هـ ن}$ ، $\overline{هـ ك} \parallel \overline{ن ل}$

نشاط :



لاحظ العلامات المستخدمة في الأشكال التالية (علامات التوازي) . أيهما يمثل متوازي أضلاع؟ ولماذا؟

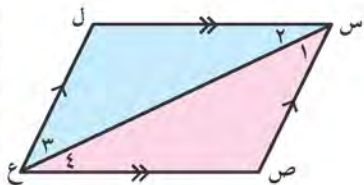


كل ضلعين متقابلين متوازيان



الخاصية الأولى :

في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان .



سوف نثبت الخاصية كما يلي :

المعطيات : (١) س ص ع ل متوازي أضلاع
المطلوب : إثبات أن : (١) $\overline{س ص} \cong \overline{ل ع}$ ،
(٢) $\overline{س ل} \cong \overline{ص ع}$

البرهان : لإثبات ذلك نبحث عن مثلثين متطابقين .

العبارات والمفردات :

متوازي الأضلاع
Parallelogram

زاويتان متقابلتان

Opposite

Angles

زاويتان متتاليتان

Consecutive

Angles

معلومات مقيدة :

معظم الأشكال التي تراها في الجسور الحديدية هي على شكل متوازي الأضلاع .



وليكن Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \hat{1} = \hat{3} \text{ (بالتبادل والتوازي)} \\ (2) \hat{2} = \hat{4} \text{ (بالتبادل والتوازي)} \\ (3) \overline{س ع} \text{ (قطر متوازي الأضلاع (ضلع مشترك))} \end{array} \right\} \Delta س ص ع \cong \Delta ع ل س$$

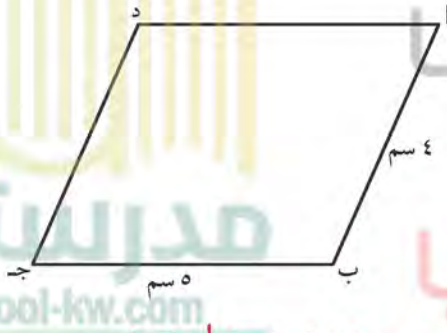
حالة التطابق هي (ز . ض . ز)

ينتج من التطابق أن: $\overline{س ص} \cong \overline{ع ل}$ ، $\overline{س ل} \cong \overline{ص ع}$

∴ كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان .

تذكر أن :

محيط الشكل (المضلع)
الهندسي هو مجموع
أطوال أضلاعه .



تدرّب (١) : في الشكل المقابل متوازي أضلاع .

أوجد محيط متوازي الأضلاع :

لايجاد المحيط نوجد باقي أطوال أضلاع متوازي الأضلاع :

د ج = ٤ سم

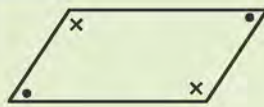
ا ب = ٥ سم

السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين
السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

محيط متوازي الأضلاع = ١٨ سم

الخاصية الثانية :

في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .

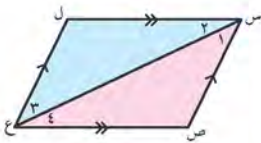


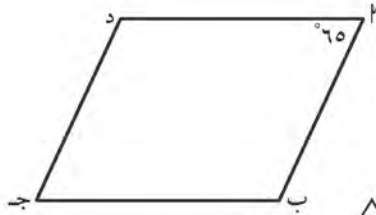
وسوف نبث الخاصية الثانية كما في برهان الخاصية الأولى :

ينتج من التطابق أن: $\hat{ل} \cong \hat{ص}$

$$\hat{ع} \cong \hat{س} \text{ ومنه نجد أن } \hat{س} \cong \hat{ع} \text{ و } \hat{١} + \hat{٢} = \hat{٣} + \hat{٤}$$

∴ كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان .





تدرب (٢) :

أب جد متوازي أضلاع . $\hat{a} = 65^\circ$
أوجد \hat{b} ، \hat{c} ، \hat{d} .

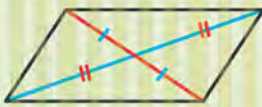
المعطيات : (١) أب جد متوازي أضلاع ، (٢) $\hat{a} = 65^\circ$
المطلوب : إيجاد قياس \hat{b} ، \hat{c} ، \hat{d} .

البرهان : \therefore أب جد متوازي أضلاع (معطى)

$\hat{b} = 180^\circ - \hat{a} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ (لأن كل زاويتين متاليتين متكاملتان)

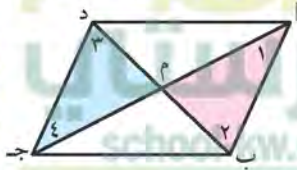
$\hat{c} = \hat{a} = 65^\circ$ (لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتين)

$\hat{d} = \hat{b} = 115^\circ$ (لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتين)



الخاصية الثالثة :

في متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر .



سوف نثبت الخاصية كما يلي :

المعطيات : (١) أب جد متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م .

المطلوب : إثبات أن : (١) م منتصف $\overline{أج}$ ، (٢) م منتصف $\overline{ب د}$.

البرهان : لإثبات ذلك نبحث عن مثلثين متطابقين .

وليكن $\triangle م ب د$ ، $\triangle م ج د$ فيهما :

$\triangle م ب د \cong \triangle م ج د$ \therefore حالة التطابق هي (ز . ض . ز) $\left\{ \begin{array}{l} (١) \hat{ب} = \hat{ج} \text{ (بالتبادل والتوازي)} \\ (٢) \hat{د} = \hat{د} \text{ (بالتبادل والتوازي)} \\ (٣) م ب = م ج \text{ (من خواص متوازي الأضلاع)} \end{array} \right.$

ويتبع أن : $م ب = م ج$ (أي أن : م منتصف $\overline{أج}$) ،

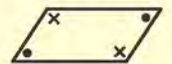
$م د = م د$ (أي أن : م منتصف $\overline{ب د}$)

نستنتج أن : القطرين $\overline{أج}$ ، $\overline{ب د}$ ينصف كل منهما الآخر .

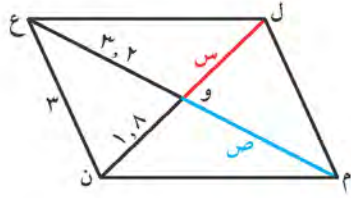
\therefore في متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر .

تذكّر أن :

- في متوازي الأضلاع كل زاويتين متاليتين متكاملتان .



- مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمتوازي الأضلاع تساوي 360°



تدرّب (٣) :

ل م ن ع متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و .
أوجد : (١) س ، ص . (٢) محيط المثلث ل م و

∴ الشكل ل م ن ع متوازي أضلاع مقطع ()

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ س = ون = ٨ ، ١ وحدة طول ،

وبالمثل ص = وع = ٢ ، ٣ وحدة طول

∴ محيط Δ ل م و = ١,٨ + ١,٨ + ٣,٢ + ٣,٢ = ٨ وحدة طول

تم التحميل من



تدرّب (٤) :

في متوازي الأضلاع المقابل ،
أوجد قيمة كلٍّ من س ، ص .

من خواص متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان

بالمثل : $٧ = ٥ + ٢ ص$

$$٥ - ٧ = ص ص$$

$$٢ = ص ص$$

$$ص = ١$$

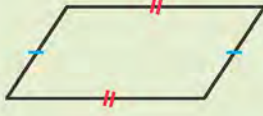
فيكون : $١٠ = ٥ - ٣ س$

$$٥ + ١٠ = ٣ س$$

$$١٥ = ٣ س$$

$$٥ = س$$

مما سبق : تحققنا من صحة خواص متوازي الأضلاع وهي :



(١) في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان



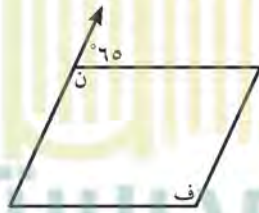
(٢) في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان



(٣) في متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر

تمرّن :

١ أوجد قيمة كل من س ، ف ، ن في متوازيات الأضلاع التالية :



ب

$$ن = ف = 180 - 60 = 120$$

$$= 110$$



أ

$$س = 55$$

$$ف = ن = 180 - 55 = 125$$

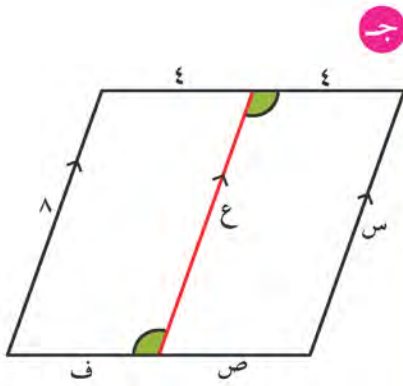
$$= 120$$

٢ إذا كان أ ب ج د متوازي أضلاع وكان الفرق بين أي زاويتين غير متقابلتين 40° ،

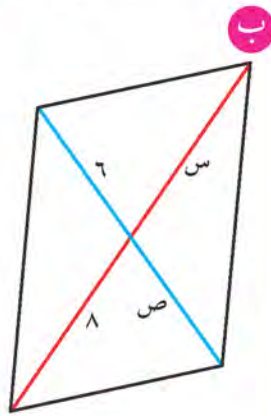
فما هو قياس الزاوية الصغرى لمتوازي الأضلاع؟

$$120$$

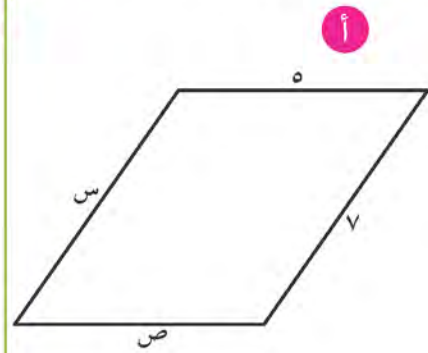
٣ أوجد الأطوال المجهولة في متوازيات الأضلاع التالية :



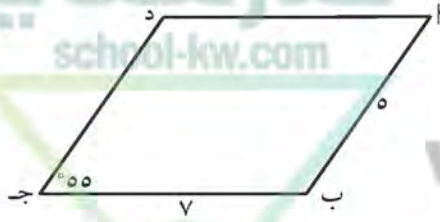
$\hat{ع} = س$
 $\hat{ع} = ص$
 $\hat{س} = ع$
 $\hat{ف} = ع$



$\hat{س} = س$
 $\hat{ص} = ص$



$\hat{س} = س$
 $\hat{ص} = ص$



٤ أ ب ج د متوازي أضلاع فيه أ ب = ٥ وحدة طول ،

ب ج = ٧ وحدة طول ، $\hat{ب} = \hat{د} = ٥٥^\circ$ ،

أوجد ما يلي مع ذكر السبب :

أ د = ب ج = ٧ السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

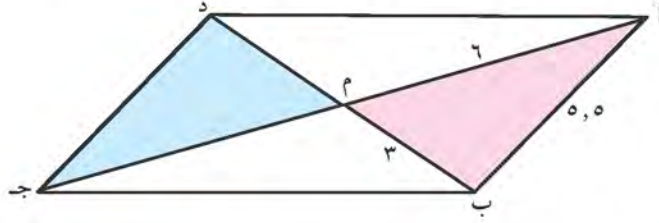
د ج = أ ب = ٥ السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

ب (أ) = د (ب) = ٥٥° السبب : كل زاويتين متقابلتان متطابقتان

ب (ب) = د (د) = $١٨٠^\circ - ٥٥^\circ = ١٢٥^\circ$ السبب : كل زاويتين متقابلتان متكاملتان

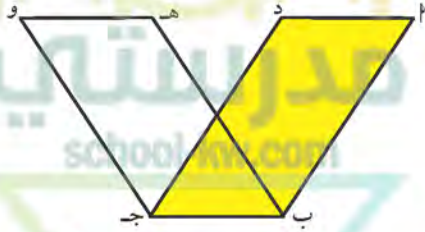
ب (د) = د (ب) = ١٢٥° السبب : كل زاويتين متقابلتان متطابقتان

٥) ا ب ج د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ، ا ب = ٥,٥ وحدة طول ،
 ا م = ٦ وحدة طول ، ب م = ٣ وحدة طول . احسب محيط Δ د م ج .



د م = ا ب = ٥,٥ وحدة طول السبب : القطران ينصف كل منهما الآخر
 م ج = ا م = ٦ وحدة طول السبب : القطران ينصف كل منهما الآخر
 د ج = ب م = ٣ وحدة طول السبب : ضلعان متقابلان متطابقان
 ∴ محيط Δ د م ج = ١٦,٥ وحدة طول

٦) ا ب ج د ، ه ب ج و متوازي أضلاع ،
 أثبت أن : ا د = ه و



ا د = ب ه . ضلعان متقابلان متطابقان في متوازي
 الاضلاع ا ب ج د

ه و = ب ه . ضلعان متقابلان متطابقان في متوازي
 الاضلاع ه ب ج و

إذا " ا د = ه و من خواص المساواة

٧ أمامك متوازيات أضلاع ، أوجد قيمة س في كل مما يلي :



أ

$$\begin{aligned} ١٢٠ + س + ٣٠ &= ٣٦٠ \\ ١٥٠ + س &= ٣٦٠ \\ س &= ٣٦٠ - ١٥٠ \\ س &= ٢١٠ \end{aligned}$$

تم التحميل من



ب

$$\begin{aligned} ٨ + س - ١ &= ٣٦٠ \\ ٧ + س &= ٣٦٠ \\ س &= ٣٦٠ - ٧ \\ س &= ٣٥٣ \end{aligned}$$



موقع مدرستي

www.school-kw.com

حالات الكشف عن متوازي الأضلاع

Conditions For a Quadrilateral To be a Parallelogram

٣-٨

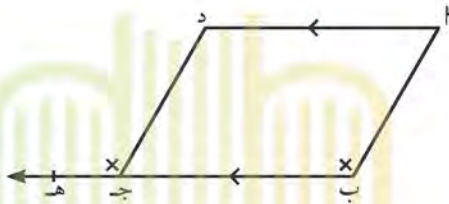


سوف تتعلم : متى يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع ؟

نشاط (١) :



تعلمت سابقاً أن الشكل الرباعي الذي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان يسمى متوازي أضلاع . وظف ما سبق لحل النشاط التالي :



١ :: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (١) (معطى)

:: $\angle B = \angle D$ (٢) (معطى)

وهما في وضع تناظر

:: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن الشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع

لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

معلومات مفيدة :

يستخدم صانعو الدراجات الهوائية فكرة متوازي الأضلاع في تصميم الهيكل المعدني لها .



اللوازم :

أعواد كوينز



٢ :: $\angle B = \angle D$ (٢) (معطى)

وهما في وضع تناظر

:: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (١)

:: $\angle C = \angle A$ (٢) (معطى) وهما في وضع تبادل

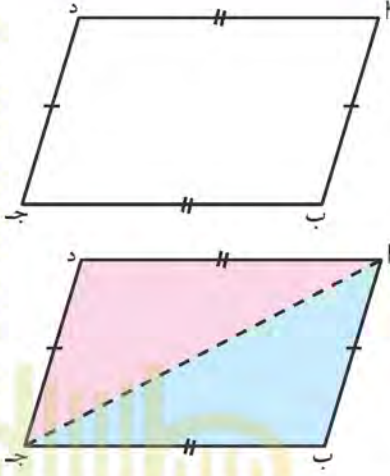
:: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن الشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع

لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

وسوف ندرس الأربع حالات للكشف عن متوازي الأضلاع .

الحالة الأولى : لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



سنتحقق معاً بأن الشكل الرباعي الذي فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان كحد أدنى من المعطيات تكفي لنقول إن الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

المعطيات : (١) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ شكل رباعي

(٢) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب : إثبات أن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع

العمل : نرسم \overline{AC} قطرًا في الشكل

البرهان : (نبحث عن زوايا (متبادلة - متناظرة - متحالفة) تؤدي إلى التوازي من خلال تطابق مثلثين) .

$\triangle ABC$ ، $\triangle CDA$ فيهما :

(١) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (معطى)

(٢) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (معطى)

(٣) \overline{AC} ضلع مشترك (عملاً)

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ض . ض . ض)

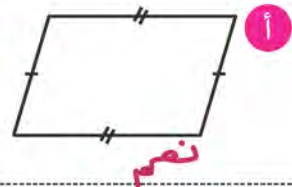
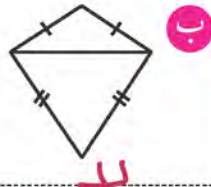
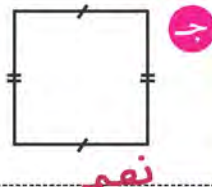
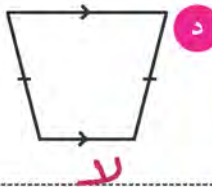
وينتج من التطابق أن : $\angle B \cong \angle D$ ، $\angle A \cong \angle C$ (وهما في وضع تبادل) ، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (وهما في وضع تبادل) ،

مما سبق ينتج أن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع .

الحالة الأولى : إذا كان في الشكل الرباعي كل ضلعين متقابلين متطابقين فإن الشكل يكون متوازي أضلاع .

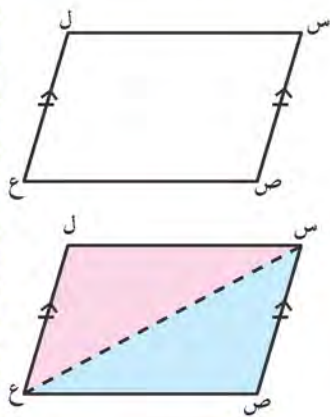
تدرّب (١) :

أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟



لا
نعم
كل ضلعين متقابلين متطابقين

لا
نعم
كل ضلعين متقابلين متطابقين



الحالة الثانية : لإثبات أنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع ؟

المعطيات : (١) س ص ع ل شكل رباعي

(٢) س ص \cong ل ع ، س ص // ل ع

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل متوازي أضلاع

العمل : نرسم س ع قطرًا في الشكل

البرهان : (نبحث عن مثلثين يضم أحدهما س ص ، س ع والآخر يضم ل ع ،

س ع ونثبت تطابقهما) .

Δ س ص ع ، Δ ل ع س فيهما :

(١) س ص \cong ل ع (فرضًا)

(٢) $\hat{ص} س ع \cong \hat{ل} ع س$ (بالتبادل والتوازي)

Δ س ص ع \cong Δ ل ع س

(ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنّ : س ع \cong ل ع (وهما في وضع تبادل)

\therefore ل س // ص ع (١) ، \therefore س ص // ل ع (معطى) (٢)

\therefore من (١) ، (٢) ينتج أنّ س ص ع ل متوازي أضلاع .

وعلى ذلك نقول : نعم المعطيات في الشكل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي

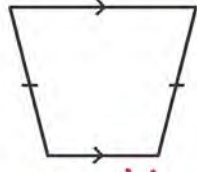
س ص ع ل متوازي أضلاع .

الحالة الثانية : إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان

فإنّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

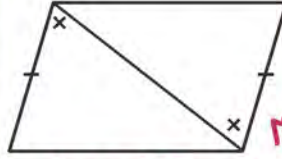
تدرّب (٢) :

أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع؟



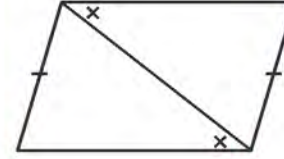
٣

لا



٢

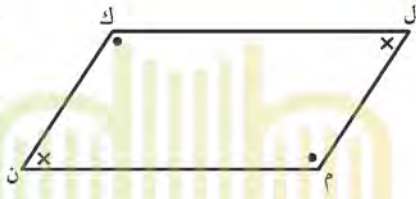
ضلعان متقابلان



١

لا

متطابقان ومتوازيان



الحالة الثالثة : لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون

الشكل الرباعي ل م ن ك متوازي أضلاع؟

المعطيات : (١) ل م ن ك شكل رباعي

$$(٢) \angle ل = \angle ن ، \angle م = \angle ك$$

المطلوب : إثبات أن ل م ن ك متوازي أضلاع

البرهان : مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي يساوي 360°

$$\therefore \angle ل + \angle ن + \angle م + \angle ك = 360^\circ$$

ولكن $\angle ل = \angle ن ، \angle م = \angle ك$ (فرضاً)

$$\therefore 2\angle ل + 2\angle م = 360^\circ$$

$$\therefore \angle ل + \angle م = 180^\circ$$

$\therefore \angle ل ، \angle م$ متحالفتان وفي جهة واحدة من القاطع ل م .

$$\therefore ل ك \parallel م ن \quad (١)$$

وبالطريقة نفسها يمكننا إثبات أن ل م \parallel ك ن (٢) (بتطبيق الخطوات السابقة على $\angle ن ، \angle م$)

\therefore من (١)، (٢) ينتج أن ل م ن ك متوازي أضلاع .

وعلى ذلك نقول : نعم المعطيات في الشكل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي ل م ن ك متوازي أضلاع .

الحالة الثالثة : إذا كان في الشكل الرباعي كل زاويتين متقابلتين متطابقتين فإن

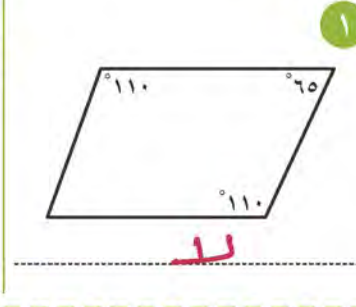
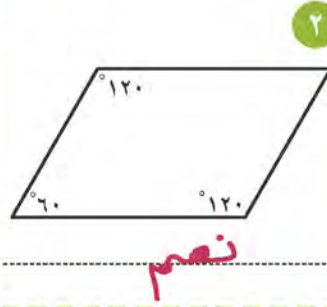
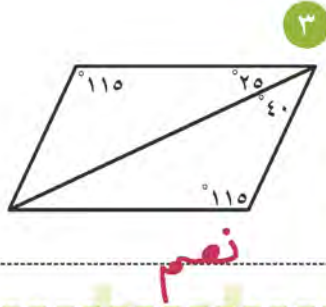
الشكل يكون متوازي أضلاع .

لاحظ أن : الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع إذا كانت كل زاويتين متتاليتين

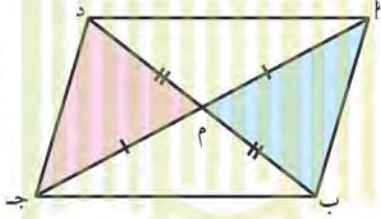
(متحالفتين) فيه متكاملتين .

تدرّب (٣) :

أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع :



الحالة الرابعة : لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ؟

المعطيات : (١) $ABCD$ شكل رباعي

(٢) $AM = CM$ ، $BM = DM$

المطلوب : إثبات أن $ABCD$ متوازي أضلاع .

البرهان : (نبحث عن مثلثين يضم أحدهما AM ، BM والآخر يضم CM ، DM ونثبت تطابقهما).

$\triangle AMB$ ، $\triangle CMD$ فيهما :

(١) $AM = CM$ $BM = DM$

(فرضاً)

(٢) $BM = DM$

(فرضاً)

(٣) $\angle AMB = \angle CMD$ بالتقابل بالرأس

وينتج من التطابق أن :

$\angle BAM = \angle DCM$ ، $\angle ABM = \angle CDM$ ، $AB \parallel CD$ (١)

وبنفس الطريقة يمكن من تطابق المثلثين AMD ، BMC ثبت أن $AD \parallel BC$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن ، $ABCD$ متوازي أضلاع .

الحالة الرابعة : إذا كان في الشكل الرباعي القطران ينصف كل منهما الآخر فإنّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

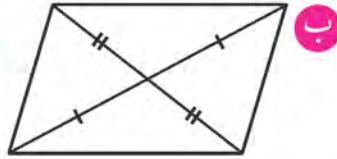
تدرّب (٤) :

أي من الأشكال الرباعية التالية حسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟



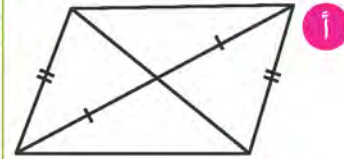
ج

كلا



ب

نعم



أ

كلا

مما سبق نجد أنه : يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توفرت أحد الشروط التالية :



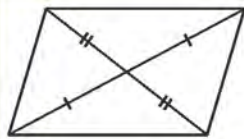
١ كل ضلعين متقابلين متوازيين (من التعريف) .



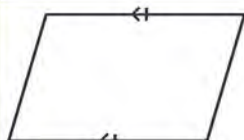
٢ كل ضلعين متقابلين متطابقين .



٣ كل زاويتين متقابلتين متطابقتين .



٤ القطران ينصف كل منها الآخر .



٥ ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان .

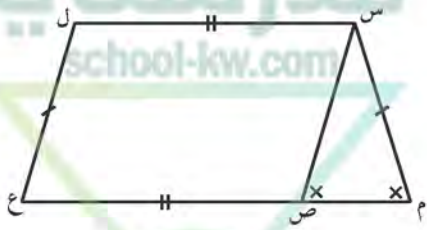
تدرّب (٥) :

ضع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع وفق المعطيات المبينة عليه مع ذكر السبب :

<p>كل زاويتين متقابلتين متطابقتان</p>	<p>ضلعان متقابلان متطابقتان ومتوازيان</p>	
		<p>القطران ينصف كل منهما الأخر</p>

مثال (١) : إذا كان $س ل = ص ع$ ، $س م = ل ع$ ، $\hat{م} \cong \hat{س ص م}$ ،

برهن أنّ الشكل الرباعي $س ص ع ل$ متوازي أضلاع .



الحل :

المعطيات : (١) $س ل = ص ع$

(٢) $س م = ل ع$

(٣) $\hat{م} \cong \hat{س ص م}$

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي $س ص ع ل$ متوازي أضلاع

البرهان : في $\Delta س م ص$ ، $\hat{م} \cong \hat{س ص م}$ (فرضًا)

$\therefore \Delta س م ص$ متطابق الضلعين فيه $س م = س ص$

$\therefore س م = ل ع$ (فرضًا) ،

من خواص المساواة (١)

$\therefore س ص = ل ع$

(٢)

$\therefore س ل = ص ع$ (فرضًا)

\therefore من (١) ، (٢) ينتج أنّ :

$س ص ع ل$ متوازي أضلاع لأنه شكل رباعي فيه (كل ضلعين متقابلين متطابقان)

تذكّر أنّ :

إذا كان المثلث متطابق الضلعين ، فإن زاويتي القاعدة فيه متطابقتان ، والعكس صحيح .



تذكّر أنّ :

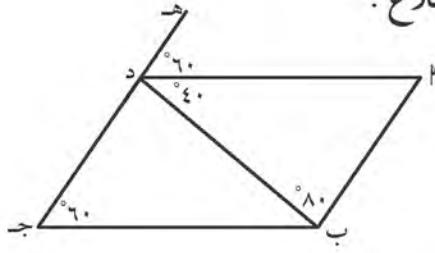
خواص المساواة :
إذا كان $ا ، ب ، ج$ ،
أعداد نسبية
وكان $ا = ب$ فإن :
 $ا + ج = ب + ج$
 $ا - ج = ب - ج$
 $ا \times ج = ب \times ج$
 $ا \div ج = ب \div ج$
 $ا \neq ج$

ملاحظة :

إذا كان $ا = ب$ ، $ب = ج$ ،
فإن $ا = ج$

تدرّب (٦) :

برهن على أنّ الشكل الرباعي $أبجد$ متوازي أضلاع .



المعطيات: $أبجد$ شكل رباعي ،

$$(١) \quad \angle د = \angle ه = \angle ا = 60^\circ$$

$$(٢) \quad \angle ب = \angle د = 80^\circ$$

$$(٣) \quad \angle ا = \angle ب = 40^\circ$$

المطلوب: إثبات أنّ الشكل الرباعي $أبجد$ متوازي أضلاع .

البرهان: $\angle ا = \angle ه = \angle ا = 60^\circ$ (وهما في وضع تناظري)

$$\therefore \overline{أد} \parallel \overline{بج} \quad (١)$$

$$\text{في } \triangle أبد، \angle ا = 60^\circ, \angle ب = 80^\circ, \angle د = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\therefore \angle ا = \angle ب = 60^\circ \quad (وهما في وضع تبادلي)$$

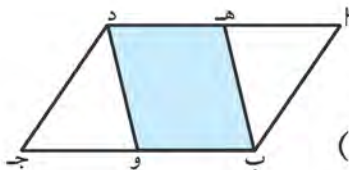
$$\therefore \overline{أب} \parallel \overline{دج} \quad (٢)$$

\therefore من (١)، (٢) ينتج أنّ:

$أبجد$ متوازي أضلاع لأنّه (شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين)

• فكر في طرق أخرى للحل . www.schoolkhal.com

مثال (٢): إذا كان $أبجد$ متوازي أضلاع فيه $ه$ منتصف $أد$ ، و $متصف ب ج$ برهن أنّ الشكل الرباعي $ه ب و د$ متوازي أضلاع .



المعطيات: $أبجد$ متوازي أضلاع ،

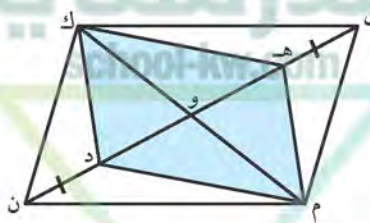
$$(١) \quad ه = ه = د \quad (\text{ه منتصف } أ د)$$

$$(٢) \quad ب = و = ج \quad (\text{و منتصف } ب ج)$$

المطلوب: إثبات أنّ الشكل الرباعي $ه ب و د$ متوازي أضلاع .

الحل :

- البرهان : \because $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع
 $\therefore \overline{AD} = \overline{BC}$
 (من خواص متوازي الأضلاع)
 $\therefore \frac{1}{4} \overline{AD} = \frac{1}{4} \overline{BC}$
 (من خواص المساواة)
 $\therefore \overline{HD}$ منتصف \overline{AD} ، و \overline{HB} منتصف \overline{BC} (فرضاً)
 (1) $\therefore \overline{HD} = \overline{HB}$
 $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (من خواص متوازي الأضلاع)
 $\therefore \overline{HD} \parallel \overline{HB}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
 (2) \therefore من (1)، (2) ينتج أن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع.
 (شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان)



تم التعميل من
 موقع مدرستي :  (7) تدريب
 إذا كان $\overline{LM} \parallel \overline{NK}$ متوازي أضلاع تقاطع قطريه
 في O ، $\overline{LO} = \overline{NO}$ ،
 برهن أن الشكل الرباعي $HEMD$ متوازي أضلاع.

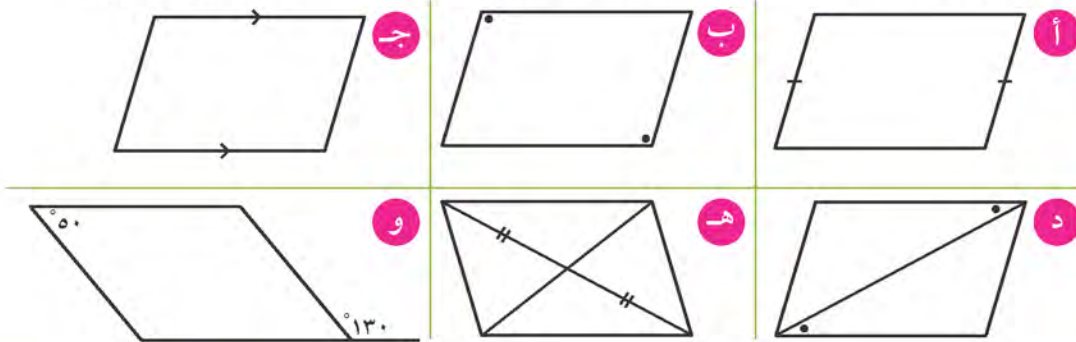
المعطيات : $\overline{LM} \parallel \overline{NK}$ متوازي أضلاع ، $\overline{LO} = \overline{NO}$.

المطلوب : إثبات أن الشكل الرباعي $HEMD$ متوازي أضلاع .

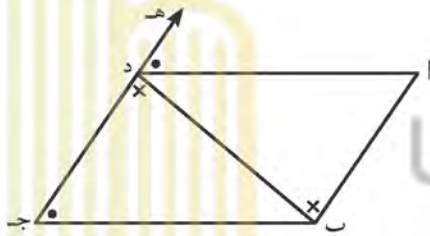
- البرهان : \because $\overline{LM} \parallel \overline{NK}$ متوازي أضلاع (فرضاً)
 $\therefore \overline{MO} = \overline{NO}$ (من خواص متوازي الأضلاع) (1)
 $\therefore \overline{LO} = \overline{NO}$ (من خواص متوازي الأضلاع)
 (معطى)
 $\therefore \overline{LO} = \overline{NO}$ و $\overline{MO} = \overline{NO}$ (من خواص المساواة)
 (2) $\therefore \overline{HO} = \overline{HO}$
 \therefore من (1)، (2) ينتج أن $HEMD$ متوازي أضلاع (القطران ينصف كل منهما الآخر)

تمرّن :

١ أضف معطى واحداً فقط من عندك يجعل كلاً من الأشكال التالية متوازي أضلاع :



٢ من البيانات على الشكل المقابل :



أثبت أن $AB \parallel CD$ متوازي أضلاع .

$$\text{هـ (P هـ د)} = \text{هـ (ب د)} \text{ هما في وضع تناظر وتوازي}$$

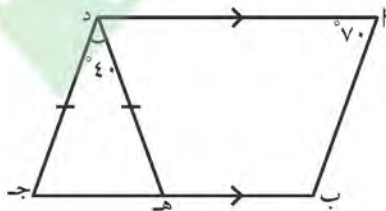
$$\text{د هـ} \parallel \text{ب ج} \text{ — ١}$$

$$\text{هـ (ب د ب)} = \text{هـ (P ب د)} \text{ هما في وضع تبادل وتوازي}$$

$$\text{ب ج} \parallel \text{د هـ} \text{ — ٢}$$

من ١ و ٢ الشكل $AB \parallel CD$ متوازي أضلاع كل ضلعين متقابلان

متوازيان



٣ في الشكل المقابل : $AD \parallel BC$

$$\text{د هـ} = \text{د ج} ، \text{ن (ب)} = 70^\circ ،$$

$$\text{ن (هـ د ج)} = 40^\circ ، \text{برهن أن}$$

الشكل الرباعي $AB \parallel CD$ متوازي أضلاع .

$$\text{د هـ} \parallel \text{ب ج} \text{ معطى}$$

$$\text{هـ (ب)} = 70^\circ \text{ معطى}$$

$$\text{هـ (ب د)} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \text{ زاويتان متتامتان متكاملتان}$$

$$\text{د هـ} \parallel \text{ب ج} \text{ متطابق الضلعين}$$

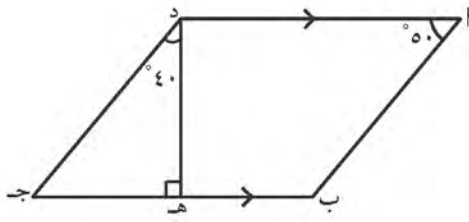
$$\text{هـ (هـ د ج)} = 40^\circ \text{ معطى}$$

$$\text{هـ (د هـ ب)} = \text{هـ (ب د)} = (180^\circ - 40^\circ) \div 2 = 70^\circ$$

$$\text{ب ج} \parallel \text{د هـ}$$

الشكل $AB \parallel CD$ متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متوازيين

٤ إذا كان \overline{AB} جد شكل رباعي فيه $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ،



ده \perp ب ج ، $\widehat{A} = 50^\circ$

و $\widehat{D} = 40^\circ$ ، فبرهن أن

الشكل \overline{AB} جد متوازي أضلاع .

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ معطى

وه $\widehat{A} = 50^\circ$ معطى

وه $\widehat{D} = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$ زاويتين متتامتين متكاملتان

وه Δ ده ج القائم الزاوية معني ه فيه :

ده \perp ب ج معطى

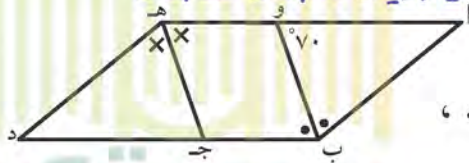
وه $\widehat{D} = 90^\circ$ معطى

وه $\widehat{A} = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

وه $\widehat{B} = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 0^\circ$ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي 360°

الشكل \overline{AB} جد متوازي اضلاع لذن فيه كل زاويتان متقابلتان متطابقتان

إذا كان \overline{AB} ده متوازي أضلاع ،



ب و منتصف \overline{AD} ، ه ج منتصف \overline{AD} ،

و $\widehat{A} = 70^\circ$ ، فبرهن أن

الشكل الرباعي و ب ج ه متوازي أضلاع .

الشكل \overline{AB} ده متوازي اضلاع معطى

وه $\widehat{A} = \widehat{D} = 70^\circ$

ب و منتصف \overline{AD} ، أيضاً ه ج منتصف \overline{AD} معطى

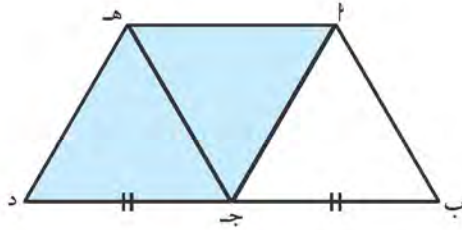
وه $\widehat{A} = \widehat{D} = 70^\circ$ بالتبادله والتوازي

الشكل و ب ج ه فيه :

وه $\widehat{A} = \widehat{D} = 70^\circ - 180^\circ = 110^\circ$ بالتجاور على مستقيم

رضه : وه $\widehat{B} = \widehat{C} = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ + 110^\circ) = 110^\circ$ مجموع قياسات الشكل الرباعي 360°

الشكل و ب ج ه متوازي اضلاع لذن كل زاويتان متقابلتان متطابقتان



٦ إذا كان $أب$ جـه متوازي أضلاع ،

$بج = جـد$ ، فبرهن أن الشكل

الرباعي $أجده$ متوازي أضلاع .

الشكل $أبجـه$ متوازي أضلاع

$\overline{بج} = \overline{جـد}$ من خواص متوازي الأضلاع

$\overline{بج} = \overline{جـد}$ معطى

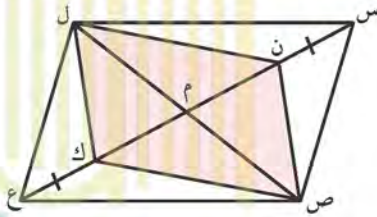
$\overline{بج} = \overline{جـد} = \overline{جـد}$ من خواص المساواة

$\overline{بج} \parallel \overline{جـد}$ من خواص متوازي الأضلاع

$بج \parallel جـد$ على استقامة واحدة

$\overline{بج} \parallel \overline{جـد}$

إذا كان الشكل $أبجـه$ متوازي أضلاع لأن كل ضلعان متقابلان متطابقين



٧ إذا كان $نص$ كل متوازي أضلاع

تقاطع قطريه في $م$ ، $سن = كع$ ، فأثبت

أن الشكل $سصعل$ متوازي أضلاع .

الشكل $نص$ كل متوازي أضلاع

من نقطة تقاطع قطري

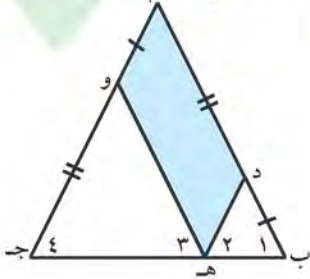
$مص = مئ$

$من = مك$

$سن = كع$

$مئ + مئ = سن + كع$ ← $مئ = مئ$

الشكل $سصعل$ متوازي أضلاع لأن قطراه ينصف كل منهما الاخر



٨ في الشكل المقابل : $\hat{ن}(\hat{١}) = \hat{ن}(\hat{٢})$

$\hat{ن}(\hat{٣}) = \hat{ن}(\hat{٤})$ ، $اد = وج$ ، $او = دب$

برهن أن $أدهو$ متوازي أضلاع .

$\Delta دب هـ$ فيه

$\hat{هـ}(\hat{١}) = \hat{هـ}(\hat{٢})$ معطى

$دب = ده$ مثلث متطابق الضلعين

$دب = دپ$

$ده = دپ$ من خواص المساواة

المثلث $وهـ د$ فيه : $\hat{هـ}(\hat{٣}) = \hat{هـ}(\hat{٤})$ معطى

$وهـ = و د$ مثلث متطابق الضلعين

$و د = دپ$

$وهـ = دپ$

الشكل $سصعل$ متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين

المستطيل (خواصه والكشف عنه) Exploring Rectangle and his Properties

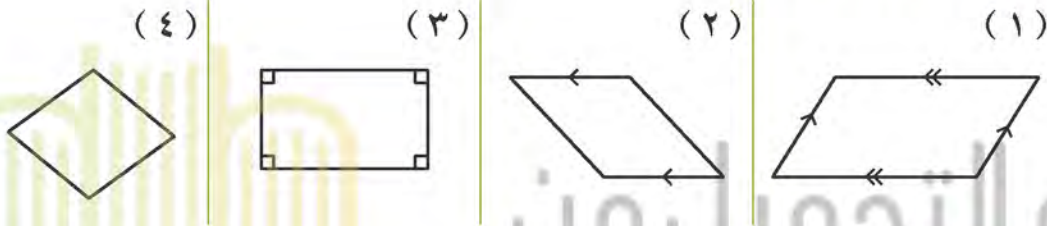
٤-٨

سوف تتعلم : خواص المستطيل والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع مستطيلاً .

نشاط (١) :



تأمل الأشكال الأربعة التالية :



١ اذكر أوجه الشبه والاختلاف بين الشكل (ج) والأشكال الأخرى :

الشكل	(١)	(٢)	(٤)
أوجه الشبه	كل ضلعين متقابلين متوازيين	ضلعان متوازيان	
أوجه الاختلاف	زواياه قائمة	زواياه قائمة	زواياه قائمة

تذكر أن :

- زوايا المستطيل قوائم .
- أقطاره متطابقة .

٢ يسمى الشكل (٣) مستطيل .

هو شكل رباعي زواياه الأربع قوائم .



هل المستطيل متوازي أضلاع ؟ لمعرفة ذلك :

لاحظ أن : $\widehat{س} = \widehat{ل}$ $\widehat{ع} = \widehat{ح}$ مستطيل

(شكل رباعي زواياه الأربع قوائم) فيه :

$\widehat{س} = \widehat{ل} = \widehat{ع} = \widehat{ح} = 90^\circ$ (وهما زاويتان في وضع تحالف ومتكاملتان)

$\overline{س ل} \parallel \overline{ع ح}$ ،

كذلك : $\widehat{س} = \widehat{ل} = \widehat{ع} = \widehat{ح} = 90^\circ$ (وهما زاويتان في وضع تحالف ومتكاملتان)

$\overline{س ح} \parallel \overline{ل ع}$ ،

نستنتج مما سبق أن : المستطيل يكون متوازي أضلاع .

فكر وناقش

هل يمكن إثبات أن المستطيل متوازي أضلاع بطريقتة أخرى؟ وضح ذلك .

الآن يمكن أن نعطي تعريفًا بسيطًا للمستطيل :

المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة وله جميع خواص متوازي الأضلاع .

تدرّب (١)

١ ب ج د مستطيل فيه : $\angle \text{ب} = 90^\circ$ ،

٢ ب = ٣ ، ٤ = د ، م ج = ٥ ، ٢ ، ٥

أكمل ما يلي :

١ د ج = ٣ لأن

٢ م ج = ٥ لأن

٣ $\angle \text{د} = 90^\circ$ لأن

٤ $\angle \text{ج} = 90^\circ$ لأن

الضلعين المتقابلين متطابقان

القطران ينصف كل منهما الأخر

الزوايا قائمة

الزوايا قائمة

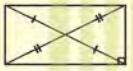
تذكّر أنّ :

للمستطيل الخواص التالية :

١ - كل ضلعين متقابلين متطابقان .



٢ - القطران ينصف كل منها الآخر .



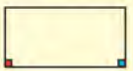
٣ - كل زاويتين متقابلتين

متساويتان في القياس وزواياه الأربعة قائمة .



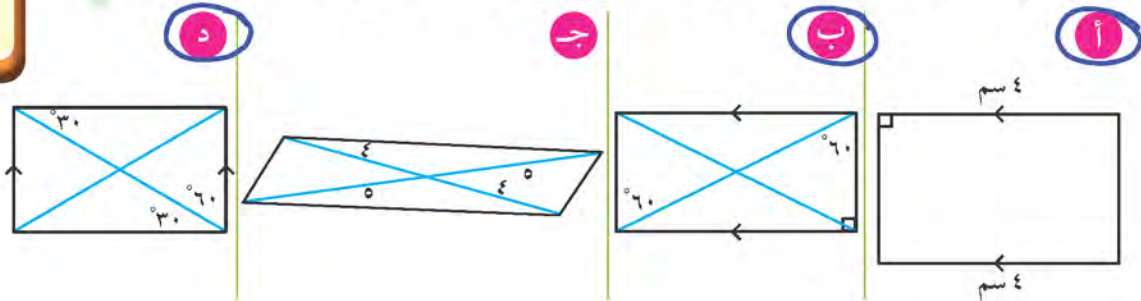
٤ - كل زاويتين متقابلتين

متكاملتان .

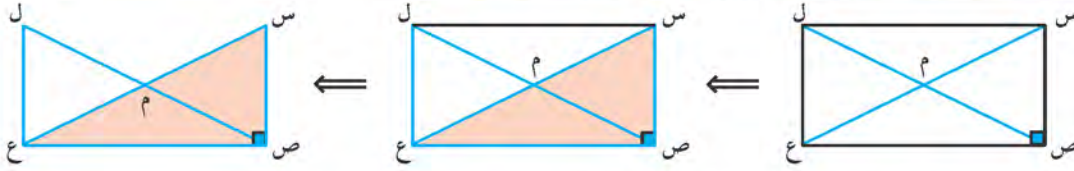


تدرّب (٢)

استخدم المعطيات (موظفًا التعريف) التي على الأشكال لتبين أيًا منها تمثل مستطيلًا .



مثال (١) : سنبحث الآن ما إذا كان للمستطيل خواص أخرى خاصة به غير أن زواياه قائمة ، وسوف نبين أن قطري المستطيل متطابقان .



المعطيات : (١) س ص ع ل مستطيل

(٢) س ع ، ص ل قطران في المستطيل

المطلوب : إثبات أن س ع = ص ل

البرهان : سنبحث عن مثلثين في المستطيل س ص ع ل يحتويان على قطريه ، وسوف نبين أن هذين المثلثين متطابقان .

Δ س ص ع ، Δ ل ع ص فيهما :

- (١) س ص = ل ع (من خواص المستطيل)
 - (٢) ص ع (ضلع مشترك)
 - (٣) \angle (ص) = \angle (ع) (من خواص المستطيل)
- Δ س ص ع \cong Δ ل ع ص (ض.ز.ض)

وينتج من التطابق س ع \cong ص ل

نستنتج مما سبق أن : قطري المستطيل متطابقان

فكر وناقش

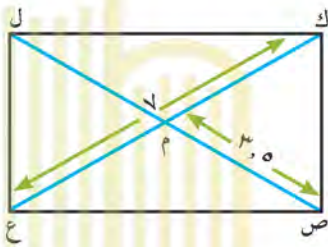
المستطيل متناظر (متماثل) حول نقطة تقاطع قطريه . فسّر ذلك .

الكشف عن المستطيل

مما سبق نقول إن متوازي الأضلاع يكون مستطيلاً إذا توفرت فيه أحد الشروط التالية :

- (١) إحدى زواياه قائمة .
- (٢) قطراه متطابقان .

تدرّب (٣) :



ك ص ع ل متوازي أضلاع فيه : ك ع = ٧ وحدة طول ،
ص م = ٣,٥ وحدة طول .

أثبت أن : ك ص ع ل مستطيل

المعطيات : (١) ك ص ع ل متوازي أضلاع

(٢) ك ع = ٧ وحدة طول ، ص م = ٣,٥ وحدة طول

المطلوب : إثبات أن ك ص ع ل مستطيل

البرهان : :: ك ص ع ل متوازي أضلاع (معطى)

:: ص م = م ل = ٣,٥ ، القطران ينصف كل منهما

:: ص ل = ل م

:: ك ع = ع ل = ٧ ، القطران متطابقان

:: الشكل ك ص ع ل مستطيل لأن

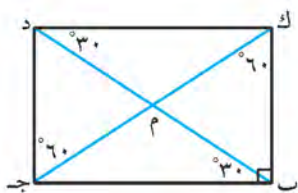
ك ص ع ل شكل متوازي أضلاع فيه القطران متطابقان

تذكّر أن :

إذا توازي مستقيمان
وقطعها مستقيم ثالث
فإن :

- الزوايا المتبادلة
متساوية في القياس .

تدرّب (٤) :



في الشكل المقابل أثبت أنّ : ك ب ج د مستطيل .

∴ ∠ (ك د ب) = ∠ (د ب ج) (وهما في وضع تبادل)

∴ ك د // ب ج (١)

∴ ∠ (ب ك ج) = ∠ (د ج ك) (وهما في وضع تبادل)

∴ ك ب // د ج (٢)

∴ من (١)، (٢) الشكل متوازي أضلاع ولكن

∠ (ك ب ج) = ٩٠°

∴ الشكل المستطيل لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

فكر وناقش

يرى المتعلّم بدر أنّ جميع متوازيات الأضلاع هي مستطيلات ، ولكن المتعلّم أمير يرى أنّ متوازيات الأضلاع مستطيلات إذا توافرت فيها شروط معينة . ما رأيك ؟
فسّر إجابتك . رأي أمير صحيح



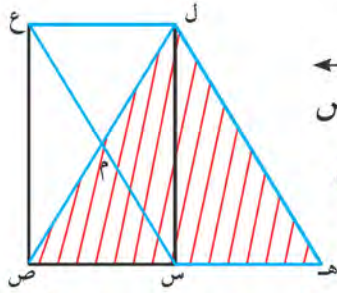
تمرّن :

١) أ ب ج د مستطيل فيه : ∠ (ب أ ج) = ٦٠°

احسب ∠ (د ب ج) .

جـ (د ب ج) = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠°

بما أن ∠ (ب أ ج) = ∠ (د ب ج) = ٦٠°

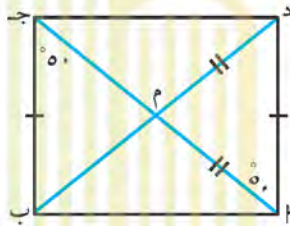


٢) س ص ع ل مستطيل ، ه س ع ل متوازي أضلاع
 أثبت أن: $\Delta ل ص ه$ متطابق الضلعين ، $ه \in ص س$
 ل ه = ع س القطران متطابقان
 في المستطيل

ل ه = ع س ضلعان متقابلان في متوازي الاضلاع

إذا ل ه = ل ص

ه ل ص ه متطابق الضلعين



٣) ا ب ج د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م
 $ا د = ب ج$ ، $م د = م ا$
 $\angle ا د ج = \angle ا ب ج = 50^\circ$

أثبت أن: ا ب ج د مستطيل ، ثم أوجد $\angle ا ب ج$.

$\angle ا د ج = \angle ا ب ج = 50^\circ$ زاويتان متبادلتان

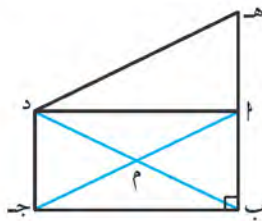
إذا $ا د \parallel ب ج$ كذلك $ا ب \parallel ج د$

إذا ا ب ج د متوازي اضلاع

ولكن $م د = م ا$ إذا القطران متساويان

ا ب ج د مستطيل

$\angle ا ب ج = 90^\circ = 50^\circ + 40^\circ$



٤) ه ا ج د متوازي أضلاع ، $\angle ا ب ج = 90^\circ$ ،

$ا د \parallel ب ج$ ، ه ، ا ، ب على استقامة واحدة .

أثبت أن: ا ب ج د مستطيل .

الشكل ه ا ج د متوازي اضلاع

ه ا ج د ب د إذا ه ، ا ، ب على استقامة واحدة

١) $ا ب \parallel ج د$

٢) $ا د \parallel ب ج$

من ١ و ٢ الشكل ه ا ج د متوازي اضلاع

٣) $\angle ا ب ج = 90^\circ$ الشكل ه ا ج د مستطيل احدى زواياه قائمة

المعين (خواصه والكشف عنه) Exploring Rhombus and his Properties

٥-٨

سوف تتعلم : خواص المعين والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع معينًا .

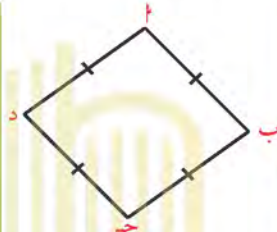
نشاط :



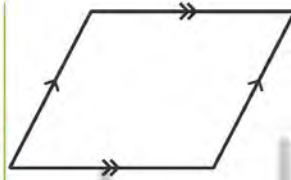
١ في الأشكال الرباعية التالية ، بم يتميز الشكل (٣) عن الأشكال الأخرى :



شكل (٤)



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

يتميز الشكل الرباعي (٣) بوجود $أب = ب ج = ج د = د أ$

٢ ماذا نسمي الشكل (٣) ؟ **معين**

هل المعين متوازي أضلاع؟ لمعرفة ذلك لاحظ أن :

$$\begin{aligned} أ ب &= د ج & \text{(فرضًا) (١)} \\ د أ &= ب ج & \text{(فرضًا) (٢)} \end{aligned}$$

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن كل ضلعين متقابلين متطابقان .

∴ الشكل $أ ب ج د$ متوازي أضلاع .

∴ المعين $أ ب ج د$ متوازي أضلاع وله جميع خواص متوازي الأضلاع .

سنبحث الآن ما إذا كان للمعين خواص أخرى وسوف نبين أن :

١ المعين قطراه متعامدان .

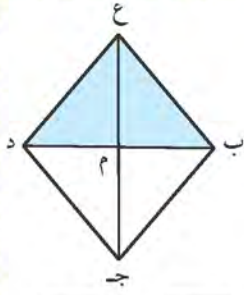
٢ كل قطر في المعين ينصف زاويتين متقابلتين فيه .

تذكر أن :

المعين هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة .

تذكر أن :

خواص متوازي الأضلاع هي كالتالي :
١ - كل ضلعين متقابلين متطابقان .
٢ - كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
٣ - كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .
٤ - القطران ينصف كل منهما الآخر .



ع ب ج د معين تقاطع قطريه في م
أثبت أن القطرين متعامدان ع ج \perp ب د .

المعطيات : ع ب ج د معين ، م منتصف القطرين .

المطلوب : إثبات أن القطرين متعامدان .

البرهان : لإثبات أن القطرين متعامدان سوف نبحث عن مثلثين يحويان ع ج ، ب د (أو جزءاً منهما) .

نأخذ المثلثين : $\triangle ع م ب$ ، $\triangle ع م د$ فيهما :

$(1) \triangle ع م ب \cong \triangle ع م د$ (من خواص المعين)
 $(2) \triangle ع م ب \cong \triangle ع م د$ (ضلع مشترك)
 $(3) \triangle ع م ب \cong \triangle ع م د$ (من خواص المعين)

$\therefore \triangle ع م ب \cong \triangle ع م د$ بحالة (ض . ض . ض)

ومنه نجد أن $\angle ع م ب = \angle ع م د = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (بالتجاور على مستقيم واحد)

\therefore القطران متعامدان ع ج \perp ب د \Leftarrow قطرا المعين متعامدان .

كذلك ينتج من التطابق : $\angle ع م ب = \angle ع م د$

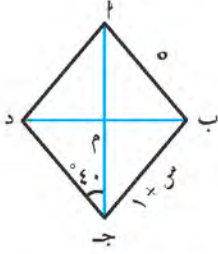
\therefore ع م منتصف (ب د)

بالمثل نقوم بمطابقة بقية المثلثات لنستنتج أن :

كل قطر في المعين ينصف زاويتين متقابلتين فيه .

تدرّب (١) :

في الأشكال التالية معينات ، أوجد المطلوب مع ذكر السبب :



طول ب ج = ٥

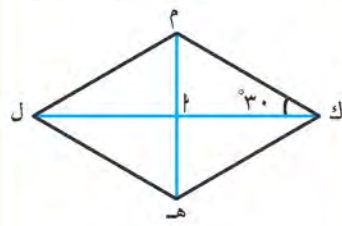
السبب : اضلاع المعين متطابقة

أوجد قيمة س :

٥ = ١ + س

س = ٤

محيط المعين = ٢٠



ن (م ك هـ) = ٦٠

السبب : القطر ينصف الزاوية

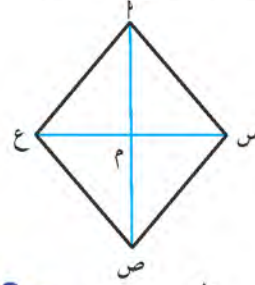
ن (م ل هـ) = ٦٠

السبب : زاويتان متقابلتان

ن (ل هـ ك) = ١٢٠

السبب : قياس زاويتين

متقابلتين ١٨٠



ن (س م ط) = ٩٠

السبب : القطران متعامدان

الكشف عند المعين

ما الشروط التي تجعل متوازي الأضلاع معيناً ؟



الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه :

أولاً : $\overline{س ص} \cong \overline{س ل}$

أكمل ما يلي :

∴ $\overline{س ص ع ل}$ متوازي أضلاع فإن :

$\overline{س ص} \cong \overline{ل ع}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

$\overline{س ل} \cong \overline{ص ع}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

∴ $\overline{س ص} \cong \overline{س ل}$ (معطى)

∴ $\overline{س ص} = \overline{س ل} = \overline{ل ع} = \overline{ع ص}$ (من خواص المساواة)

∴ س ص ع ل شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة فهو معين .

نلاحظ أن : يكون متوازي الأضلاع معيناً إذا تطابق فيه ضلعان مجاوران .

معلومات مفيدة :

يستخدم البنائون الأشكال الهندسية ، كالمربعات ، المستطيلات ، المثلثات ... إلخ في تنفيذ الفسيفساء .



ثانيًا: $\overline{س ع} \perp \overline{ص ل}$

$\Delta س م ص$ ، $\Delta س م ل$ فيهما :

$س م$ (ضلع مشترك)

$ص م = ل م$ (قطرا متوازي الأضلاع متناصفان) ← $\Delta س م ص \cong \Delta س م ل$ بحالة (ض. ز. ض.)

$\hat{ص} = \hat{ل} = 90^\circ$ (فرضًا)

$\therefore \overline{س ص} \cong \overline{س ل}$

\therefore $س ص ع ل$ متوازي أضلاع

$\therefore س ص = ع ل = ص ع = ل س$



\therefore $س ص ع ل$ شكل رباعي فيه أضلاعه الأربعة متطابقة فهو معين .

نلاحظ أن: يكون متوازي الأضلاع معين إذا تعامد قطراه .

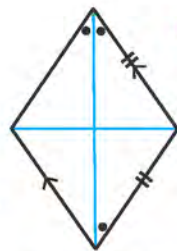
مما سبق نلاحظ أنه يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا توفر فيه أحد الشرطين التاليين :

(١) إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه .

(٢) إذا تعامد قطراه .

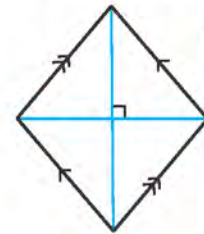
تدرّب (٢)

أي الأشكال التالية يمثل معينًا مع ذكر السبب ؟



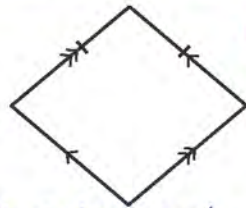
نصم

لأن متوازي الأضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان



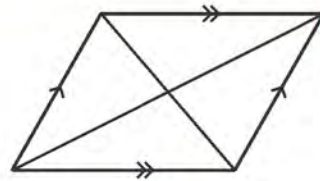
نصم

متوازي أضلاع وتعامد قطراه

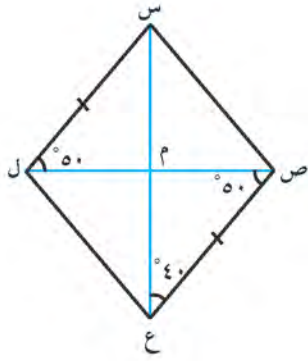


نصم

لأن متوازي الأضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان



✗



تدرّب (٣) :

في الشكل المقابل :

$$\angle س ل ص = \angle ع ص ل = 50^\circ$$

$$\angle ص ع س = \angle س ل ع = 40^\circ$$

أثبت أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل معين .

المعطيات :

$$(١) \quad س ل = ص ع$$

$$(٢) \quad \angle س ل ص = \angle ع ص ل = 50^\circ$$

$$(٣) \quad \angle ص ع س = \angle س ل ع = 40^\circ$$

المطلوب : إثبات أنّ الشكل س ص ع ل معين

البرهان :

$$\because س ل = ص ع \quad (\text{فرضاً}) (١)$$

$$\because \angle س ل ص = \angle ع ص ل = 50^\circ \quad (\text{وهما في وضع لبادلة})$$

$$\therefore س ل \parallel ص ع \quad (٢)$$

∴ من (١)، (٢) يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعين

متقابلين متوازيين، متطابقين (٣)

في $\Delta س م ع$ فيه :

$$\because \angle ع ص م = 90^\circ \quad (\text{فرضاً}) ، \because \angle ص ع م = \angle ص ع ل = 50^\circ \quad (\text{فرضاً})$$

$$\therefore \angle م ص ع = 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) = 40^\circ$$

ومنه نستنتج أن : $ص ل \perp ص ع$

(مجموع قياسات زوايا

المثلث يساوي 180°)

∴ القطران متعامدان (٤)

∴ من (٣)، (٤) الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع قطراه متعامدان .

∴ الشكل س ص ع ل معين .

تذكر أنّ :

- الرمز \perp هو رمز

عمودي على .

- الرمز \parallel هو رمز مواز

لـ .

- مجموع قياسات

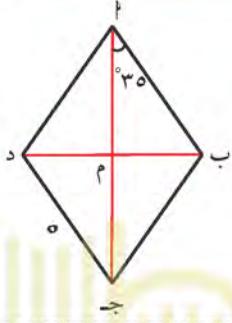
زوايا المثلث يساوي

180° .

فكر وناقش

يستطيع خالد أن يذكر الحالات التي يكون فيها متوازي أضلاع معينًا . فهل تستطيع أن تتحدى خالد بإعطاء أمثلة لكل حالة .

تمرّن :



١) أ ب ج د معين تقاطع قطريه في م ، $\angle أ ب ج = 35^\circ$ ، ج د = 5 وحدة طول .

أ) احسب قياسات زوايا المعين .

$$\angle أ ب ج = \angle ب ج د = \angle ج د ا = \angle د ا ب = 35^\circ$$

$$\angle ا ب د = \angle ب د ا = \angle د ا ج = \angle ا ج د = 110^\circ$$

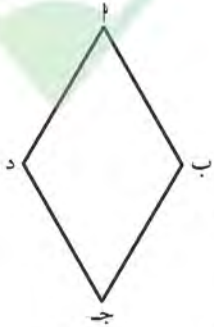
ب) أوجد طول ب ج .

$$ب ج = 5 \text{ وحدة طول}$$

ج) أوجد قياس $\angle م ب ج$.

$$\angle م ب ج = 90^\circ$$

www.school-kw.com



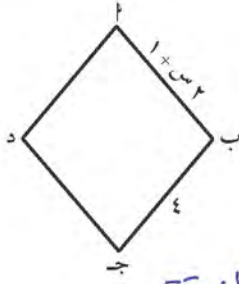
٢) أ ب ج د معين طول قطره $\overline{ب د}$ يساوي طول ضلعه . أوجد قياسات زوايا المعين أ ب ج د الأربع .

$$\angle ا ب ج = \angle ب ج د = \angle ج د ا = \angle د ا ب = 60^\circ$$

$$\angle ا ب د = \angle ب د ا = \angle د ا ج = \angle ا ج د = 120^\circ$$

$$\angle ا ب د = \angle ب د ا = \angle د ا ج = \angle ا ج د = 120^\circ$$

$$\angle ا ب ج = \angle ب ج د = \angle ج د ا = \angle د ا ب = 60^\circ$$



٣) ا ب ج د معين ، ا ب = ٢س + ١ وحدة طول ،
ب ج = ٤ وحدة طول . أوجد قيمة س .

ا ب ج د معين

ا ب ج د معين متطابقه $ا ب = ب ج = ج د = د ا$

$$ا ب = ب ج$$

$$٤ = ١ + ٢س$$

$$١ - ٤ = ٢س - ٤$$

$$٣ = ٢س$$

$$\frac{٣}{٢} = س$$

تم التحميل من

٤) في الشكل أمامك ، أثبت أن ا ب ج د معين .



$$ا ب ج د معين$$

$$\angle ا ب ج = \angle ب ج د = \angle ج د ا = \angle د ا ب = ٩٠^\circ$$

$$ا ب \parallel ج د$$

من ١ و ٢ $ا ب \parallel ج د$ متوازي اضلاع لأن فيه ضلعين

متقابلين متطابقين ومتوازيين

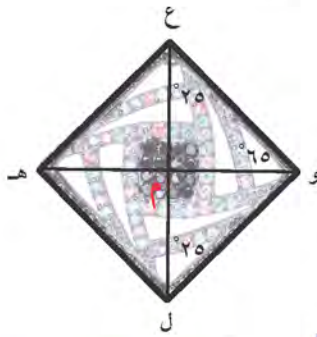
$$\Delta ا ب ج د فيه : \angle ا ب ج = \angle ب ج د = \angle ج د ا = \angle د ا ب = ٩٠^\circ$$

$$ا ب = ب ج$$

ا ب ج د معين لأنه متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان



يستعمل مصممو المجوهرات أشكالاً هندسية في تصميماتهم للحصول على أشكال جذابة ومميزة تخصهم .
الصورة المقابلة لقطعة ألماس تبدو رباعية الشكل .



الشكل ع و ل هـ فيه :

ع ل منصف لكل من (و ع هـ) و (و ل هـ)

$$\angle (و ع م) = \angle (و ل م) = 25^\circ , \angle (و م) = 65^\circ .$$

أثبت أن الشكل الرباعي ع و ل هـ معين .

ع ل منصف للزاويتين (و ع هـ) ، (و ل هـ) معطى

$$\angle (و ع م) = \angle (و ل م) = 25^\circ$$

هما في وضع تبادل وتوازي



ع و // هـ ل

$$\angle (و ع م) = \angle (و ل م) = 25^\circ$$

و ل // ع هـ

الشكل ع و ل هـ متوازي اضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

$$\angle (و ع ل) = \angle (و ل ع) = 25^\circ$$

و ع = و ل

الشكل ع و ل هـ معين لأن متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

المربع (خواصه والكشف عنه) Exploring Square and his Properties

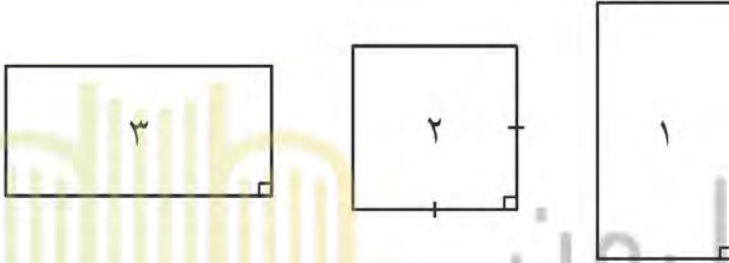
٦-٨

سوف تتعلم : خواص المربع والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع مربعاً .

نشاط (١) :



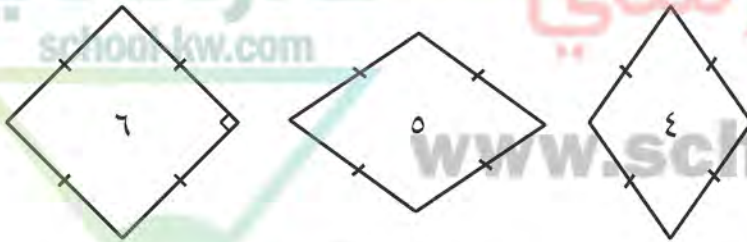
لديك مجموعتان من الأشكال الرباعية :



مجموعة (١)
مستطيلات

• الأشكال (١)، (٢)، (٣) كل منها يمثل مستطيلاً، إلا أن الشكل رقم (٢) يتميز بـ **ضلعان متجاوران متطابقان** ونسمي هذا الشكل **مربع**.

المربع هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان (متساويان في الطول).



مجموعة (٢)
معينات

• الأشكال (٤)، (٥)، (٦) كل منها يمثل معيناً، إلا أن الشكل رقم (٦) يتميز بأن إحدى زواياه قياسها 90° .
نسمي هذا المعين والذي إحدى زواياه 90° **بالمربع**.

المربع هو معين قياس إحدى زواياه 90° .

نلاحظ ممّا سبق أنّ :

للمربع كل خواص المستطيل وكل خواص المعين .

فكر وناقش

هل المربع متوازي أضلاع؟ فسر ذلك . نعم لأن المربع فيه كل ضلعين

متساويين متوازيين

تذكر أنّ :

- خواص المستطيل :
- ١ - له جميع خواص متوازي الأضلاع .
- ٢ - القطران متطابقان .
- ٣ - زواياه الأربع قوائم .

تذكر أنّ :

- خواص المعين :
- ١ - له جميع خواص متوازي الأضلاع .
- ٢ - القطران متعامدان .
- ٣ - الأضلاع متطابقة .
- ٤ - القطران ينصف كل منها زواياه المتقابلة .

تذكر أنّ :

- خواص متوازي الأضلاع
- ١ - كل ضلعين متقابلين متطابقان .
- ٢ - كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
- ٣ - القطران ينصف كل منها الآخر .

تدرّب (١) :

إذا كان س ص ع ل متوازي أضلاع ، فضع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثل مربعًا مع ذكر السبب :

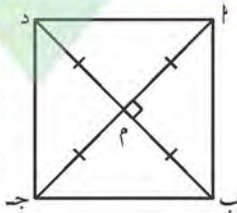
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<p>س = ص = ع = ل = ٩٠° س = ص = ع = ل</p>	<p>س = ص = ع = ل = ٩٠° س = ص = ع = ل</p>		

الكشف عن المربع

ما الشروط التي يجب أن يحققها متوازي الأضلاع ليكون مربعًا؟

إذا كان في متوازي الأضلاع القطران متطابقان ومتعامدان ، فإنّ متوازي الأضلاع

هو مربع . www.school-kw.com



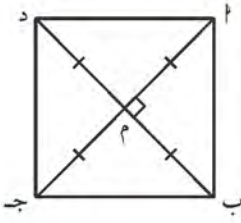
في الشكل المقابل ا ب ج د متوازي أضلاع

أثبت أنّ : ا ب ج د مربع .

المعطيات :

ا ب ج د متوازي أضلاع ، ا ج د ⊥ ب د ، ا ج د = ب د

المطلوب : إثبات أنّ ا ب ج د مربع



خطوات البرهان كالتالي :

الحالة الأولى :

∵ AB ∥ CD متوازي أضلاع فيه :

$$AB = CD$$

∵ AB ∥ CD مستطيل

(قطراه متطابقان)
(1)

من تطابق $\triangle ABM$ ، $\triangle CDM$ (ض . ز . ض) $\implies AB = CD$ (ضلعان متجاوران متطابقان) (2)

∴ من (1)، (2) AB ∥ CD مربع

الحالة الثانية :

∵ AB ∥ CD متوازي أضلاع فيه :

$$AB \perp CD$$

(قطراه متعامدان)
(1)

∵ AB ∥ CD معين

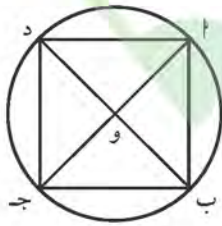
∵ $\triangle ABM$ قائم ومتطابق الضلعين (AM = CM) $\implies \angle MAB = \angle MCB = 45^\circ$ ،

بالمثل $\angle MCD = \angle MDA = 45^\circ$

(قطرا المعين ينصفان زواياه)

∴ $\angle B = \angle D = 90^\circ$ (قياس إحدى الزوايا قائمة) (2)

∴ من (1)، (2) AB ∥ CD مربع



في الشكل المقابل \overline{AB} ، \overline{CD} قطران في دائرة مركزها O ،
 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$. أثبت أن \overline{AB} ∥ \overline{CD} مربع .

المعطيات : (1) ومركز الدائرة ، (2) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

المطلوب : إثبات أن \overline{AB} ∥ \overline{CD} مربع

البرهان : ∵ ومركز الدائرة

$$\therefore AO = BO = CO = DO$$

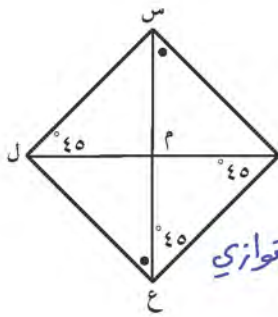
∴ $AO = BO$ ، القطران \overline{AC} ، \overline{BD} متطابقان (1)

(2) ولكن $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

∴ من (1)، (2)، (3) \overline{AB} ∥ \overline{CD} مربع

تمرّن :

١ باستخدام المعطيات في الرسم أثبت أنّ :
س ص ع ل مربع الشكل .

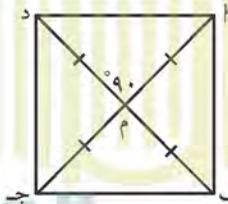


$$\begin{aligned} \widehat{ه} (\widehat{س ع ج}) &= \widehat{ه} (\widehat{ل ع س}) \text{ هما في وضع تبادل وتوازي} \\ \text{س ص} // \text{ل ع} \\ \widehat{ه} (\widehat{ع ص ل}) &= \widehat{ه} (\widehat{س ل ع}) = 60^\circ \text{ هما في وضع تبادل وتوازي} \\ \text{ص ع} // \text{س ل} \end{aligned}$$

يتبع ان س ص ع ل متوازي اضلاع لأن شكل رابعي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

$$\Delta \text{ ص م ع فيه : } \widehat{ه} (\widehat{ص م ع}) = 180^\circ - (\widehat{ه} (\widehat{ل ع س}) + \widehat{ه} (\widehat{س ل ع})) = 90^\circ$$

س ع \perp ص ل
ص م = ع م
س ص ع ل مربع لأنه متوازي اضلاع فيه قطران متعامدان ومتطابقان



٢ مستعيناً بالمعطيات على الرسم أثبت أنّ الشكل مربع .

$$\widehat{د} = \widehat{ب} = \widehat{ج} = \widehat{ا}$$

د ب د ب متوازي اضلاع لأن القطران ينصف كل منهما الأخر

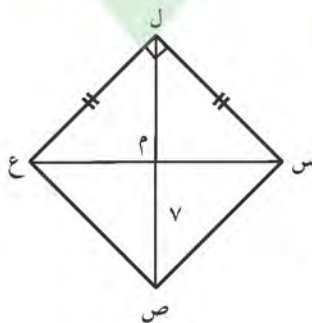
$$\widehat{ه} (\widehat{د ب ا}) = 90^\circ$$

القطران متعامدان
د ب \perp ب ا

$$\widehat{د} = \widehat{ب} = \widehat{ج} = \widehat{ا}$$

القطران متطابقان
د ب = ب ا

يتبع ان د ب ا ج د مربع لأنه متوازي اضلاع فيه قطران متطابقان ومتعامدان



٣ في الشكل المقابل ل س ص ع مربع فيه : ل م = ٣ ب + ٤ ،

ع م = ٢ ج - ١ ، م ص = ٧ . أوجد قيمة كل من ب ، ج .

$$\begin{array}{l|l} ٧ = ١ - ب ج & ٧ = ٤ + ب ٣ \\ ١ + ٧ = ب ج & ٤ - ٧ = ب ٣ \\ ٨ = ب ج & ٣ = ب ٣ \\ ٤ = ب & ١ = ب \end{array}$$

تطبيقات (حل مسائل علم الأشكال الرباعية)
Applications (Problem Solving on Quadrilaterals)

٧-٨

سوف تتعلم : حل مسائل على الأشكال الرباعية .

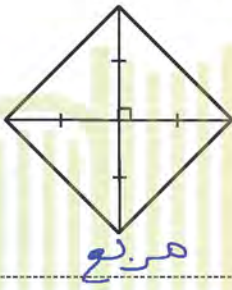
نشاط :



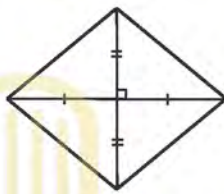
تذكر أن :

- يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان :
- فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .
- فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان .
- فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان .
- فيه القطران ينصف كل منهما الآخر .
- فيه كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .

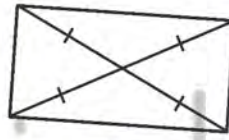
حدّد أيًا من الأشكال الرباعية التالية (متوازي أضلاع - مستطيل - معين - مربع) :



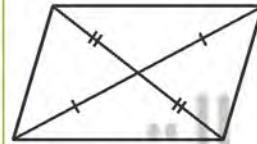
مربع



معين



مستطيل



متوازي أضلاع

تدرب (١) :



أب جد مربع ، هـ منتصف أد ، و منتصف ب ج

أثبت أن : أوجه متوازي أضلاع و منتصف ب د

المعطيات : P ب هـ د مربع ، هـ منتصف د ب

المطلوب : إثبات أن : P هـ ب هـ متوازي أضلاع

البرهان :

أب جد مربع

\therefore $AD = BC$

\therefore هـ منتصف أد

\therefore و منتصف ب ج

\therefore $AP = BP$

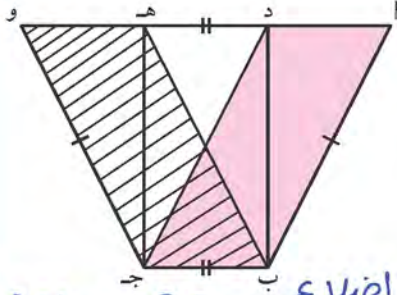
\therefore $AD \parallel BP$

\therefore $AP \parallel BP$

من (١) ، (٢) يتبع أن :

الشكل أوجه متوازي أضلاع (لأنه شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان ومتوازيان)

تدرّب (٢) :



أب جد، هـ ب ج و متوازي أضلاع .

د، هـ د \exists أو بحيث ده = ب ج ، أب = و ج

أثبت أنّ: د ب ج هـ مستطيل .

المعطيات: P ب ج د ، هـ ب ج و متوازي أضلاع د هـ = ب ج

المطلوب: إثبات أنّ: د ب ج هـ مستطيل

البرهان:

:: أب جد، هـ ب ج و متوازي أضلاع (معطى)

:: $\overline{أد} \parallel \overline{ب ج}$ ، $\overline{هـ و} \parallel \overline{ب ج}$ (من خواص متوازي أضلاع)

:: د، هـ $\exists P$ (معطى)

:: د هـ \parallel $\overline{ب ج}$ (١)

د هـ = $\overline{ب ج}$ (معطى) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أنّ:

د ب ج هـ متوازي أضلاع (لأنه شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متساويان) (٣)

:: أب = د ج ، و ج = هـ ب (من خواص متوازي الأضلاع)

:: أب = و ج (معطى)

:: أب = د ج = ب هـ = و ج (من خواص المساواة)

:: د ج = هـ ب (٤) ، \therefore القطران متطابقان (٤)

من (٣)، (٤) ينتج أنّ:

الشكل د ب ج هـ مستطيل (لأنه متوازي أضلاع فيه قطران متطابقان)

تذكر أنّ:

يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً إذا كان:

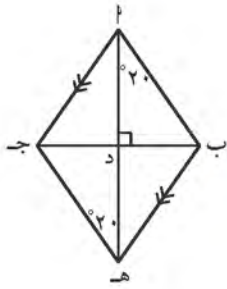
١- إحدى زواياه قائمة (قياسها 90°).

٢- القطران متساويان في الطول.

تذكر أن:

- يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا كان:
- ١ - فيه ضلعان متجاوران متطابقان.
- ٢ - القطران متعامدان.

تدرّب (٣):



في الشكل المقابل، أثبت أن: $\hat{a} = \hat{b}$ جـ معين.

المعطيات: (١) $\overline{dP} \parallel \overline{cP}$ ، (٢) $\overline{dP} \perp \overline{cP}$

(٣) $\hat{c} = \hat{d}$ (وهما في وضع تبادل)

المطلوب: اثبات أن $\hat{a} = \hat{b}$ معين

البرهان: $\hat{a} \parallel \hat{b}$ ، (١)

$\hat{c} = \hat{d}$ (وهما في وضع تبادل)

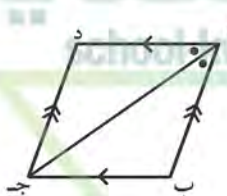
$\hat{a} \parallel \hat{b}$ (٢)

من (١)، (٢) الشكل $\hat{a} = \hat{b}$ جـ معين

البرهان: الشكل $\hat{a} = \hat{b}$ جـ معين لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان

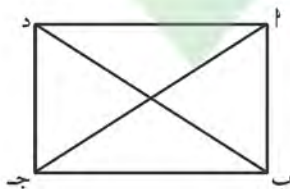
تمرّن:

١ اكتب اسم الشكل في كل مما يلي حسب المعطيات على الرسم:



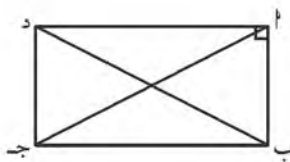
أ $\hat{a} = \hat{b}$ جـ معين

متوازي أضلاع فيه $\hat{a} = \hat{b}$ جـ معين



ب $\hat{a} = \hat{b}$ جـ معين

متوازي أضلاع فيه $\hat{a} = \hat{b}$ جـ معين

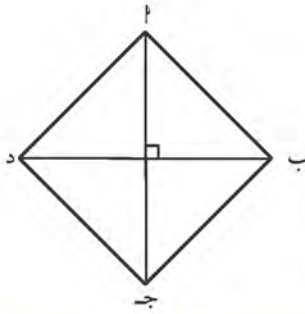


ج $\hat{a} = \hat{b}$ جـ معين

متوازي أضلاع فيه $\hat{a} = \hat{b}$ جـ معين

تذكر أن:

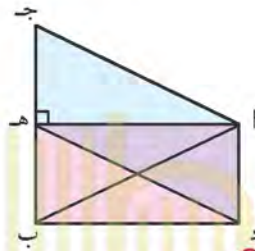
- يكون متوازي الأضلاع مربعًا إذا كان:
- ١ - إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متطابقان.
- ٢ - إحدى زواياه قائمة وقطراه متعامدان.
- ٣ - القطران متساويان في الطول ومتعامدان.



٥ ا ب ج د متوازي أضلاع فيه ا ج \perp ب د ،
 ا ج = ب د

مربع

٢ في الشكل ا ب ج مثلث متطابق الضلعين ،



ا د ه ج متوازي أضلاع ، ا ه \perp ب ج .
 أثبت أن : الشكل ا د ب ه مستطيل .

Δ ا ب ج متطابق الضلعين فيه : ا ه \perp ب ج . (معلم)

ه ب = ه ج ، ا د ه ج متوازي أضلاع ، ا د = ب ج .

إذا يتبع ان ا د = ه ب ، ا د \parallel ه ب من خواص متوازي الاضلاع

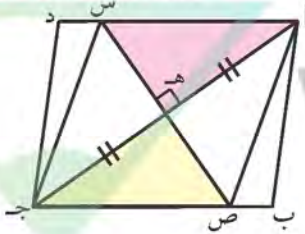
ب ج د ه ، ا د \parallel ب ه ، إذا الشكل ا د ب ج متوازي أضلاع

ا ب ج د متطابق الضلعين ا ب = ا د ، ا د ه ج متوازي الاضلاع

ا ب ج د ه ، إذا ا ب = د ه القطران متطابقان

الشكل ا د ب ه مستطيل

٣ ا ب ج د متوازي أضلاع ، س ص \perp ا ج ،



ه منتصف ا ج ، س \exists ا د ، ص \exists ب ج .

أثبت أن : الشكل ا ص ج س معين .

Δ ا ه س ، Δ ب ه ص فيها

ا ه = ب ه

ه ا = ه ب = ه س (زاوية عمودية)

ه ا = ه ب (زاوية عمودية) بالتبادل والتوازي

Δ ا ه س \cong Δ ب ه ص (زاوية عمودية، زاوية عمودية)

يتبع ان ا ه = ب ه (١)

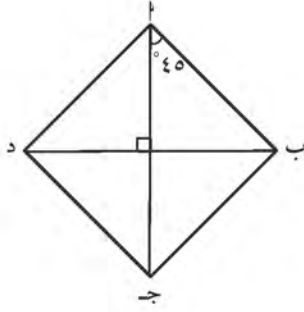
س \exists ا د ، ص \exists ب ج

ا ه \parallel ب ه (٢)

من (١) ، (٢) يتبع ان ا ه ص ج متوازي أضلاع (٣)

س ص \perp ا ه (٤)

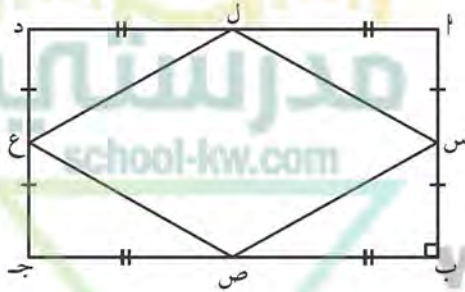
من (٣) ، (٤) يتبع ان ا ه ص ج معيناً



٤ ا ب ج د معين فيه $\angle ا ب ج = 45^\circ$
 أثبت أن: الشكل ا ب ج د مربع.

ا ب ج د معين
 ا ب ج د ينصف الزاوية د ا ب
 $\angle ا ب ج = 90^\circ$
 ا ب ج د مربع

تم التحميل من



٥ ا ب ج د مستطيل فيه س، ص، ع، ل منتصفات أضلاعه ا ب، ب ج، ج د، د ا على الترتيب.
 أثبت أن س ص ع ل معين.
 باستخدام تطابق المثلثات ا ل س

ا ب ج د ل س ص ع ل معين
 ا ب ج د ل س ص ع ل معين

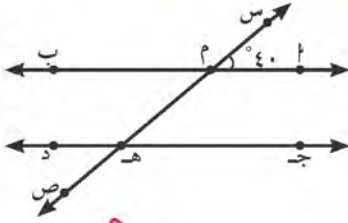
ا ب ج د ل س ص ع ل معين

الأشكال الرباعية

اسم الشكل	رسم الشكل	تعريف الشكل	خواص الشكل
متوازي الأضلاع		هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .	<ul style="list-style-type: none"> - الأضلاع المتقابلة متطابقة . - يتقاطع القطران في منتصفهما . - نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظر له . - كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس . - كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .
المعين		هو متوازي أضلاع له ضلعان متجاوران متطابقان .	<ul style="list-style-type: none"> - أضلاعه الأربعة متطابقة . - القطران متعامدان وينصف كل منهما الآخر . - كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين فيه .
المستطيل		هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .	<ul style="list-style-type: none"> - زواياه الأربع قائمة . - قطراه متطابقان ويتقاطعان في منتصفهما .
المربع		<ul style="list-style-type: none"> - هو متوازي أضلاع له ضلعان متجاوران متطابقان وزاوية قائمة . - هو معين له زاوية قائمة . - هو مستطيل له ضلعان متجاوران متطابقان . 	<ul style="list-style-type: none"> - قطراه متطابقان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما . - زواياه الأربع قائمة وأضلاعه متطابقة . - قطر المربع يصنع مع كل ضلع من أضلاع المربع زاوية قياسها 45° .
شبه المنحرف		هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .	

مراجعة الوحدة الثامنة
Revision Unit Eight

٨-٨



١ في الشكل المقابل إذا كان $AB \parallel CD$ ،

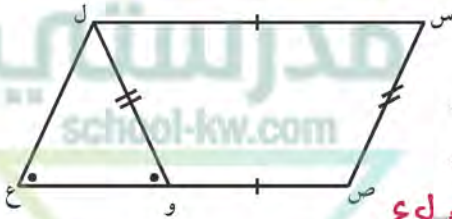
س ص قاطع لهما في م ، هـ على الترتيب ،

ن $\hat{P} = 40^\circ$ ، أوجد مع ذكر السبب :

أ ن $\hat{Q} =$ السبب : **بالتناظر والتوازي مع \hat{P} س**

ب ن $\hat{Q} =$ السبب : **بالتجاور على مستقيم مع \hat{P} هـ م**

ج ن $\hat{Q} =$ السبب : **بالتقابل بالرأس مع \hat{P} هـ م**



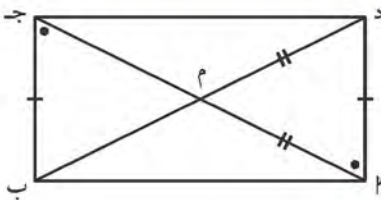
٢ أثبت أن : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .

Δ ل و ع فيه $\hat{L} = \hat{C}$ و $\hat{E} = \hat{E}$ (مضاد)

Δ ل و ع متطابق الضلعين

ل و = ل و ع ، س ص = ل و إذا " س ص = ل و
وبما أن س ل = ص ع (مضاد)

الشكل س ص ع ل فيه كل ضلعين متقابلين متطابقين
الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع



٣ أثبت أن : الشكل أ ب ج د مستطيل .

هـ د $\hat{A} = \hat{C}$ و هـ ب $\hat{B} = \hat{D}$ في وضع تبادل وتوازي

د \parallel ب

د = ب

إذا " د \hat{A} ، هـ ب ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

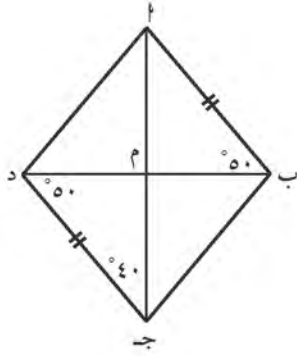
الشكل د ب هـ ج متوازي أضلاع

م نقطة تقاطع قطريه (القطران ينصف كل من الآخر)

د م = م ب ، م د = م ب

م د = م ب ، د ب = ب د القطران متطابقان

الشكل د ب هـ ج متطابقان



٤ أثبت أن: الشكل أ ب ج د معين .

وه (أ ب) = (ب ج) = (ج د) = (د أ) في وضع تبادل وتوازي

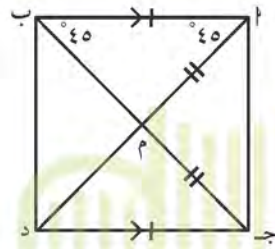
أ ب // د ج ، ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{أ ب} = \text{د ج} \\ \text{ب ج} = \text{د أ} \end{array} \right.$

الشكل أ ب ج د متوازي اضلاع

وه (أ ب) = (ب ج) = (ج د) = (د أ) ، وه (أ ب) = (ب ج) = (ج د) = (د أ) = ٥٠

وه (أ ب) = (ب ج) = (ج د) = (د أ) = ٩٠ = (٥٠ + ٤٠) - ١٨٠

∴ أ ب ⊥ ب ج ، القطران متعامدان في الشكل أ ب ج د معين



٥ أثبت أن: الشكل أ ب ج د مربع .

أ ب = ب ج = ج د = د أ ، ضلعان متقابلان متوازيان
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{أ ب} // \text{د ج} \\ \text{ب ج} // \text{د أ} \end{array} \right.$

الشكل أ ب ج د متوازي اضلاع

في Δ م ب ج ، وه (م ب) = (م ج) = (م د) = (م أ) = ٤٥ ، مثلث متطابق الضلعين

وه (أ ب) = (ب ج) = (ج د) = (د أ) = ٩٠ = (٤٥ + ٤٥) - ١٨٠

∴ أ ب ⊥ ب ج ، القطران متعامدان في الشكل أ ب ج د معين

∴ أ ب = ب ج = ج د = د أ ، القطران متطابقان في الشكل أ ب ج د مربع

٦ في الشكل المقابل : و مركز الدائرة ،

أثبت أن الشكل : أ ب ج د معين .

من خواص الدائرة : الأضلاع الأقطار متطابقة

∴ أ ب = ب ج ، و ب ج = ج د ، و ج د = د أ ، و د أ = أ ب

∴ أ ب = ب ج = ج د = د أ ، القطران ينصف كل منهما الآخر



الشكل أ ب ج د متوازي اضلاع ∴ أ ب = ب ج = ج د = د أ

∴ أ ب ⊥ ب ج ، القطران متعامدان إذا أ ب ج د معين



٧ تهتم شركات الإلكترونيات الحديثة في تصميماتها

على الأشكال الهندسية المتنوعة . ففي الصورة أمامك

شاشة لجهاز التلفاز رباعية الشكل .

الشكل الرباعي أ ب ج د فيه :

∠١ = ∠٢ = ∠٣ = ∠٤ ، ب ج = د أ .

أثبت أن الشكل أ ب ج د مستطيل .

وه (أ) = (ب) = (ج) = (د) وهما في وضع تبادل وتوازي

أ د // ب ج ، ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

∴ أ ب = ب ج = ج د = د أ ، القطران متطابقان

الشكل أ ب ج د متوازي اضلاع

وه (أ) = (ب) = (ج) = (د) = ٩٠

∴ أ ب = ب ج = ج د = د أ

في Δ م ب ج ، نقطت تقاطع القطرين

أ ب ج د مستطيل ∴ أ ب = ب ج = ج د = د أ ، أي ان القطران متطابقان

اختبار الوحدة الثامنة

أولاً: في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١	<input checked="" type="radio"/>	المربع هو معين قطراه متطابقان .
٢	<input checked="" type="radio"/>	في الشكل المرسوم $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ في الشكل المرسوم $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
٣	<input checked="" type="radio"/>	الشكل المقابل يمثل مستطيلاً
٤	<input checked="" type="radio"/>	الشكل الرباعي المرسوم يمثل متوازي أضلاع

ثانياً: لكل بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة :

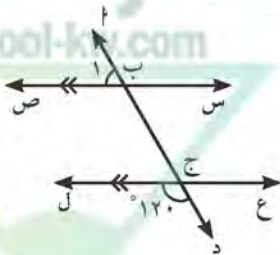
٥ في الشكل المقابل \hat{A} يساوي :

(أ) 120°

(ب) 60°

(ج) 180°

(د) 360°



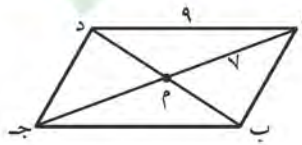
٦ في متوازي الأضلاع المرسوم ، $\angle A = \angle C$

(أ) وحدة طول

(ب) ٣ وحدة طول

(ج) ١٤ وحدة طول

(د) ٩ وحدة طول



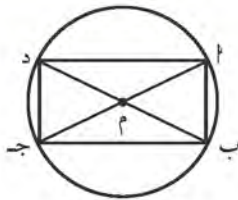
٧ الشكل المقابل يمثل دائرة مركزها م فإن الشكل \overline{AB} ج د هو :

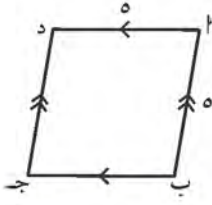
(أ) مربع

(ب) مستطيل

(ج) معين

(د) شبه منحرف





٨ في الشكل المقابل ا ب ج د يمثل :

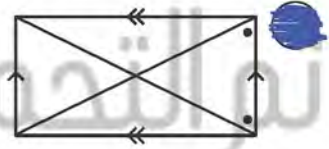
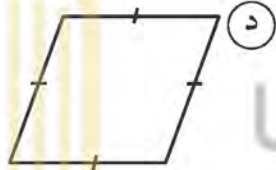
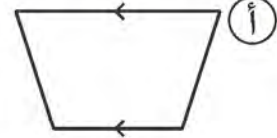
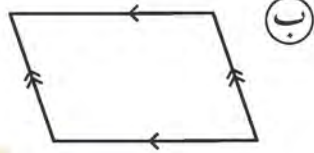
(ب) مستطيل

(ج) مربع

(د) شبه منحرف

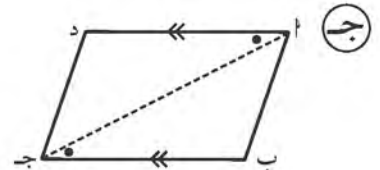
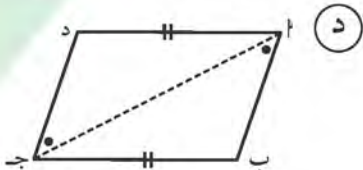
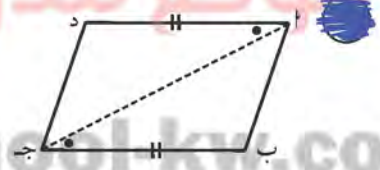
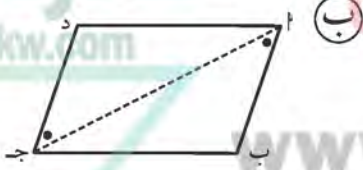
(ا) معين

٩ الشكل الذي يمثل مستطيلاً هو :



تم الترحيب من

١٠ الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع فيما يلي هو :



المقادير الجبرية Algebraic Expressions

الوحدة التاسعة

بيئتي

My Environment



مشروع الوحدة :
(مرافق ترفيهية)

الترفيه هو نشاط تقوم به في أوقات الفراغ ، وتعتبر الحاجة للقيام بأنشطة ترويحية عنصرًا أساسيًا في علم النفس وعلم الأحياء البشري ، لذا ظهرت أهمية المرافق الترفيهية ليقوم الإنسان بالأنشطة المتنوعة .

خطة العمل :

- تحدد المجموعة بعض الأماكن الترفيهية في بيئتها وتذكر عمر المكان وتحدد العلاقة بين عمر المرفق وعمر الأشخاص في بيئتهم (معلم - مدير - إخصائي) .

الصيغ اللفظية	الصيغة بالرموز
ضعف عدد	
نصف عدد	
يزيد بمقدار ٢	
ينقص بمقدار ١	

خطوات تنفيذ المشروع :

- تكون المجموعة جدولًا بأسماء بعض المرافق الترفيهية من بيئتهم وتحدد عمر المرفق .

- تحدد المجموعة أشخاصًا من بيئتهم ويرمز إليهم بالرموز (س ، ص) .

- تحدد المجموعة العلاقة المسجلة في الجدول سواء بالزيادة عن العمر أو بالنقصان أو الضعف أكمل الجدول لبدء المشروع .

- توجد المجموعة عمر الشخص المطلوب بالسنين .

علاقات وتواصل :

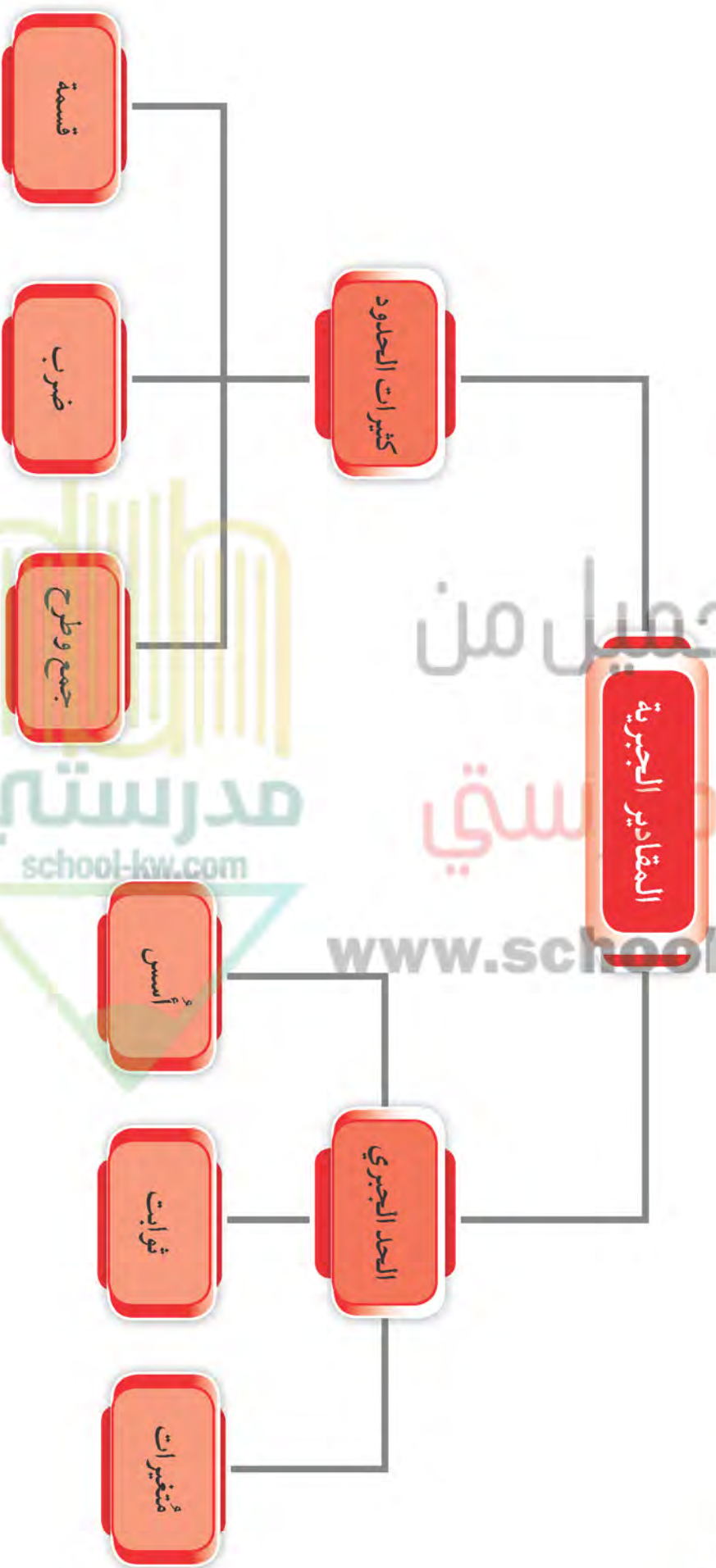
- يناقش أفراد المجموعة الجداول ويتحققون من صحة عمر الأشخاص المعروضين .

عرض العمل :

- تعرض كل مجموعة الجدول الصحيح وتشرحه للمتعلمين في الفصل .

العمر بالسنين للشخص	العلاقة اللفظية للشخص مع المرفق	اسم الشخص من بيئتك وعمره بالرموز	عمر المرفق بالسنوات	المرفق
٣٠	يساوي (=)	معلم الصف س	٣٠	محمية صباح الأحمد
	المرفق يقل ١٠ سنوات عن ص	مدير المدرسة ص	٤٠	حديقة الحيوانات
				أبراج الكويت
				منتزه الخيران
			

مخطم تنظيمي للوحدۃ التاسمۃ



تم التحميل من
موقع مدرستي

مدرستي
school-kw.com

www.school-kw.com

قوانين الأسس Laws of Exponents

١-٩

سوف تتعلم : قوانين الأسس .

العبارات والمفردات :

أس
Exponent
أساس
Base
قوى
Power

نشاط (١) :



قررت إحدى الشركات الكبرى للبناء وضع مخطط على عدة مراحل لبناء إحدى الضواحي السكنية . لاحظ الصور للمراحل الثلاث الأولى ، ثم أكمل :



المرحلة الأولى : $2 = 2^1$

المرحلة الثانية : $4 = 2 \times 2 = 2^2$

المرحلة الثالثة : $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

معلومات مفيدة :

- تقاس الأبعاد بين الكواكب باستخدام الأسس لبعدها المسافات حيث المسافة بين الأرض وكوكب الزهرة 10×275 كيلومتر.

٢ مكررة ن مرة

$$2^m = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_m$$

حيث ٢ عدد نسبي غير صفري ، ن $\in \mathbb{N}$

ويقرأ « ٢ أس ن » أو القوة النونية للعدد ٢ .

تدرب (١)

أكمل الجدول التالي :

النتيجة	صورة الضرب المتكرر	الأس	الأساس	الصورة الأسية
١٦	4×4	٢	٤	4^2
٢٤٣	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	٥	٣	3^5
١٦	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	٤	٢	2^4
١٥٠٠	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	٥	٥	5^5
٣	3	١	٣	3^1
s^4	$s \times s \times s \times s$	٤	s	s^4
$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$	٢	$\frac{3}{5}$	$(\frac{3}{5})^2$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$	٤	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^4$

تذكر أن :

- نسمي الصورة 2^3 بالصورة الأسية حيث ٢ يسمى الأساس و ٣ الأس ، وتقرأ ٢ أس ٣ أو للقوة ٣ أو ٢ تكعيب .

نشاط (٢) :

أكمل ما يلي:

$$(3+2)^2 = \square \quad 2 = \overbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}^{2^5} = 2^2 \times 2^3$$

$$(4+2)^3 = \square \quad 3 = \overbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}^{3^5} = 3^3 \times 3^2$$

ماذا تلاحظ؟ الأساسات نفسها وعند ضرب الأساسات نجتمع الأسس

لكل m عدد نسبي غير صفري، n عددان صحيحان يكون $m^n = m^n \times m^0$.

تدرّب (٢) :

اختصر كلاً مما يلي:

أ $6^6 = 6^7 + 6^{11}$ ب $3^2 \times 3^3 = 3^5 + 3^6$ ج $6^6 = 6^7 + 6^{11}$

د $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^5$ هـ $3^2 \times 3^3 = 3^5 + 3^6$

فكر وناقش

هل العبارة $6^2 = 3^2 \times 2^3$ صحيحة؟ فسّر إجابتك. لأن الأساسات غير متساوية.

نشاط (٣) :

أكمل ما يلي:

أ $3^2 \times 3^3 = \frac{3^2 \times 3^3}{3^2 \times 3^3} = \frac{3^2 \times 3^3}{3^5} = 3^{-3}$

ب $7^2 \times 7^3 = \frac{7^2 \times 7^3}{7^2 \times 7^3} = \frac{7^5}{7^5} = 7^0$

ماذا تلاحظ؟ عند قسمة الأساسات المتساوية نضرب الأسس

لكل m عدد غير نسبي غير صفري، n عددان صحيحان يكون $m^{-n} = \frac{m^n}{m^n}$.

تذكّر أنّ:
ص = ص^١

تدرّب (٣) :

اختصر كلّاً مما يلي :

ب) $\frac{5-5}{5} = \frac{0}{5} = 0$

أ) $\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{8 \times 8 \times 8} = \frac{8^5}{8^3} = 8^2 = 64$

د) $\frac{4-6}{7} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$

ج) $\frac{3+7}{3-7} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$

تذكّر أنّ :

س - ص =
س + (-ص) =

فكر وناقش

في (ب) يكون أس المقام يساوي أس البسط فيكون الناتج (١)
في (د) الأس من المقام أكبر من الأس من البسط فيكون الناتج سالب

للكل م نسبي عدد غير صفري ، م عدد صحيح يكون : (١) $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$
(٢) $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$

تدرّب (٤) :

اختصر ما يلي :

ب) $\frac{3-9}{2-9} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$

أ) $\frac{1+3-7}{2-7} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

هـ) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

ج) $\frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}$

نشاط (٤) :

أوجد ناتج ما يلي :

أ) $36 = 2^2 \times 3^2$

ب) $8000 = 2^3 \times 5^3 \times 2^3$

ج) $36 = 2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

د) $8000 = 2^3 \times 5^3 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

ماذا تستنتج بالنسبة لـ أ ، ج ، معاً ، ب ، د معاً ؟

يجب إجراء عملية الضرب ثم نوجد ناتج الأسس

لكل a ، b عددان نسبيان غير صفرين، m عدد صحيح يكون $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.

فكر وناقش

يقول عبد الله إن $(3 \times 2)^2 = 2^2 \times 3^2$. هل توافقه الرأي؟ لا $2^2 \times 3^2$

مثال (1): اختصر كلاً مما يلي:

أ $1024^0 = 0^0 = (04)$

ب $(2 \text{ ص ص})^2 = 2^2 \text{ ص ص} = 16 \text{ ص ص}$

ج $\text{ص ص}^2 \times \text{ص ص}^3 = \text{ص ص}^3 \times \text{ص ص}^2$

نشاط (5):

أوجد ناتج ما يلي معتمداً على قوانين الأسس:

أ $\frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 2 \left(\frac{2}{3} \right)$

ب $\frac{27}{125} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = 3 \left(\frac{3}{5} \right)$

ج $(\frac{4}{2})^0 = \frac{0}{2} = \frac{0}{2}$

ماذا تستنتج؟ لكل a ، b عددان نسبيان غير صفرين، m عدد صحيح يكون $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b} \right)^m$

لكل a ، b عددان نسبيان غير صفرين، m عدد صحيح يكون $\left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

ملاحظة: $\left(\frac{a}{b} \right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b} \right)^m}$

تدرّب (5):

أوجد ناتج ما يلي معتمداً على قوانين الأسس.

ب $\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3} \right)^4 = \frac{1}{3^4}$

أ $(\frac{24}{8})^0 = \frac{0}{8} = \frac{0}{8}$

د $\frac{16}{9} = \frac{16}{9} = \frac{4^2}{3^2} = \left(\frac{4}{3} \right)^2 = 2 \left(\frac{4}{3} \right)$

ج $\frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5} \right)^3$

نشاط (٦) :



أكمل ما يلي :

$$\begin{array}{l} \text{أ) } 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \\ \text{ب) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \\ \text{ج) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \\ \text{د) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \end{array}$$

ماذا تلاحظ ؟ خبرنا الاس خارج القوس بالاس للعدد داخل القوس

لكل عدد نسبي غير صفري ، م ، ن ، عددان صحيحان يكون : $m^n = n^m$.

تدرّب (٦) :

اختصر ما يلي :

$$\begin{array}{l} \text{أ) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \\ \text{ب) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \\ \text{ج) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \\ \text{د) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \end{array}$$

مثال (٢) :



يبلغ طول قطر الشمس نحو $1,5 \times 10^6$ كم ، ويبلغ طول قطر الأرض نحو $1,276 \times 10^4$ كم .
أوجد نسبة طول قطر الشمس إلى طول قطر الأرض .

الحل :

$$\frac{1,5 \times 10^6}{1,276 \times 10^4} = \frac{1,5 \times 10^2}{1,276} = \frac{150}{1,276}$$

تمرّن :

أوجد ناتج ما يلي :

$$\begin{array}{l} \text{أ) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \\ \text{ب) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \\ \text{ج) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \\ \text{د) } 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)} \end{array}$$

٢ اختصر لأبسط صورة :

أ $س^٦ \times س^٦ = س^{١٢}$

ب $٩٥ = ٥ \times ١٩ = ٥ \times ٥^٢$

ج $١٠٠ = ١٠ \times ١٠ = ١٠^٢$

د $س^{١١} \times س^٨ = س^{١٩}$

هـ $س^٣ \times س^٢ \times س^١ = س^٦$

و $\frac{١}{س^٥} = س^{-٥} = س^{-٦} \times س^١ = (س^{-٦} \times س^١) \times س^٠ = س^{-٦} \times س^١ \times س^٠$

ز $٤ب^٤ = (ب^٢) \times (ب^٢) \times (ب^٠) \times (ب^٠)$

ح $س^٤ \times س^٢ = س^٦ = س^٦ \times س^٠ = س^٦ \times س^٠ = س^٦ \times س^٠$

ط $١٠ب^١٠ = ١٠ \times ب^١٠ = (١٠) \times (ب^١٠)$

ي $(٢-ص)^٣ = (٢-ص)^٣ = (٢-ص)^٣$



٣ يقدر حجم الأرض بنحو $١٠^٦$ كم^٣ ،
ويقدر حجم كوكب المشتري بنحو $١٨, ١٠ \times ٣$
مرّة من حجم الأرض ، ما حجم المشتري ؟

حجم المشتري = $١٠^٦ \times ٣, ١٨ = ٣, ١٨ \times ١٠^٦$
= $٣, ١٨ \times ١٠^٦$ كم^٣

كثيرات الحدود (متعددة الحدود - الحدوديات) Polynomials

٢-٩

سوف تتعلم : ما هي كثيرات الحدود - إيجاد قيمة كثيرات الحدود
وكتابتها بالصورة القياسية .

البطاقات الجبرية

١-	١
س-	س
س ^٢ -	س ^٢

نشاط :



قسّم المعلم متعلمي الصف إلى مجموعات ،
ثم وزّع المعلم على كل مجموعة بعض البطاقات
الجبرية وطلب منهم نمذجة ما تعبر عنه البطاقات الجبرية .
١ مجموعة المتعلم فيصل كان نصيبها من البطاقات هو :



التعبير الجبري للنموذج هو : $-s^2 + 2s + 3$

٢ مجموعة المتعلم بدر كان نصيبها من البطاقات هو :



كما تمت نمذجة بطاقات فيصل ، استخدم بطاقات بدر لكتابة التعبير الجبري للنموذج المعطى :

التعبير الجبري للنموذج هو : $-s^2 + 2s + 3$

* التعبيرات الجبرية السابقة مثل : $-s^2 + 2s + 3$ تُسمى كثيرة حدود .

كثيرة الحدود (مقدار جبري) هي تعبير جبري يتكون من واحد أو أكثر من الحدود
الجبرية يتم بناؤها باستخدام عمليات الجمع والطرح .

أمثلة :

حدود جبرية
كثيرة حدود
ليست كثيرات حدود
(مقدار جبري)

(١) $2s^0$ ، $-4s^2$ ، s ، -3

(٢) $2s^0 - 4s^2 + s - 3$

(٣) s^3 ، $\sqrt{s} - 5s + 7$ ، $6s + s^2$

العبارات والمفردات :

كثيرة الحدود

Polynomial

حد

Term

وحيدة الحد

Monomial

ثنائية الحد

(ذات الحدين)

Binomial

ثلاثية الحد

Trinomial

درجة

Degree

حدود متشابهة

Like Terms

حدود غير متشابهة

None Like

Terms

الصورة القياسية

Standard Form

تذكّر أنّ :

$3s^2$ يسمى حدًا

جبريًا حيث :

3 هو المعامل

s^2 هو المتغير

كما في مثال فيصل ، اتبع الخطوات لكتابة الحدوديات باستخدام البطاقات الموضحة :

تدرّب (١)  :

اكتب تعبيراً جبرياً لكل من النموذجين أدناه :

<p>ب </p> <p>التعبير الجبري : $١-٣+٤٣-١$</p>	<p>أ </p> <p>التعبير الجبري : $٤+٣-٤٣-١$</p>
---	---

تدرّب (٢)  :

حدد من التعابير الجبرية التالية ما يمثل حدودية وما لا يمثل ذلك .

- | | |
|-------------------|---------------------------------|
| حدودية | ١ $٤س^٥ + ٢س^٢ - ٦س$ |
| ليست حدودية | ٢ $٣س^٢ - \sqrt{٦}$ |
| حدودية | ٣ $٥س^٢ - ٢س + ص + ٢ص + ٤ص - ٧$ |
| حدودية | ٤ $٣ص^٣ - ٣س^٢ + س$ |
| ليست حدودية | ٥ $\frac{٣}{س}$ |
| ليست حدودية | ٦ $٥ + ٣٣$ |

تسميات خاصة	كثيرة الحدود (الحدوديات)
وحيدة الحد	س ، ٣س ^٤ ، ٥ -
ثنائية الحد (حدانية)	ل + ٢ ، ٦س ^٢ - ٢س ، م ^٢ + ١
ثلاثية الحد (حدودية ثلاثية)	٣ + س + ٧س ^٢ ، ٦س ^٢ - ٥س ^٢ + ٢س ^٣

جميع الحدوديات في الجدول السابق تسمى **حدوديات في متغير واحد (مقدار جبري)** ، بينما الحدوديات - س - ٢ص ، ٥س^٢ - س + ص + ٢ص + ٤ص - ٩ تسمى **حدوديات في متغيرين** .

تدرّب (٣) :

حدد ما إذا كانت كل عبارة في الجدول كثيرة حدود أم لا ، وإذا كانت كذلك صنفها إلى (وحيدة حد - ثنائية حد - ثلاثية حد) ، ثم اذكر المتغيرات في الحدودية :

العبارة	هل هي كثيرة حدود؟ ولماذا؟	تصنيف الحدودية : وحيدة - ثنائية - ثلاثية	المتغير في الحدودية
٧س ^٣	نعم كثيرة حدود لأنها تتكون من حد واحد	وحيدة الحد	متغير واحد هو س
٩س ^٤ + ٤س ^٢	نعم كثيرة حدود لأنها تتكون من حدين	ثنائية	متغيران وهما : س ، ص
٦ع ^٢ - ٩ن	ليست كثيرة حدود	ليست حدودية لأن الأُس للمتغير سالب	ليست كثيرة حدود
٦س ^٥ + ٤س ^٣ - ٣	ليست كثيرة حدود	ليست كثيرة حدود لأن المتغير أُس	ليست كثيرة حدود
٧	نعم كثيرة حدود لأنها تتكون من حد واحد	وحيدة الحد	لا يوجد متغير لذلك يسمى (حد مطلق)

ملاحظة :
٥س^٢ص^٣
مجموع أسس المتغيرات
٥ = ٣ + ٢ =

درجة الحدودية وترتيبها :

- درجة كثيرة الحدود ذات متغير واحد هي قيمة أعلى (أس للمتغير) يظهر في أي حد
- درجة كثيرة الحدود ذات أكثر من متغير هي قيمة أعلى مجموع (لأسس المتغيرات) التي تظهر في أي حد .

تدرّب (٤) :

اكتب الحدود الجبرية لكثيرات الحدود التالية ، ثم اذكر أكبر أس لكل حدودية وحدد درجة الحدودية لكل منها :

درجة الحدودية	أكبر أس	الأس	الحد	الحدود الجبرية	كثيرة الحدود
الدرجة الثانية	٢	٢	$٢س^٢$	$٣س^٢$ ، ٣	$٣س^٢ + ٣$
		صفر	٣		
الدرجة الرابعة	٤	٤	ص ^٤	ص ^٤ ، ٥ ص ، $٧ - ص$	ص ^٤ + ٥ ص - ٧
		١	٥ ص		
		صفر	$٧ - ص$		
الدرجة الخامسة	٥	$٥ = ٢ + ٣$	$٣ع^٢$ ، $٣ع$ ، ١	$٣ع^٢$ ، $٣ع$ ، ١	$٣ع^٢ + ٣ع + ١$
		٣	$٣ع$		
		صفر	١		
الدرجة الخامسة	٥	$٣ = ١ + ١ + ١$	٣ ص ص ع ، $٣ - ٣ ص ص ع$ ، $٣ - ٣ ص ص ع$ ، $٣ - ٣ ص ص ع$	٣ ص ص ع ، $٣ - ٣ ص ص ع$ ، $٣ - ٣ ص ص ع$ ، $٣ - ٣ ص ص ع$	٣ ص ص ع - ٣ ص ص ع + ٣ ص ص ع ، $٣ - ٣ ص ص ع$ ، $٣ - ٣ ص ص ع$
		١	٣ ص ص ع		
		صفر	٣ ص ص ع		

من الجدول نجد أن الحدودية : $٣ص^٤ + ٥ص - ٧$ هي حدودية في متغير واحد ، من الدرجة الرابعة ومرتبة تنازلياً بحسب أكبر أس .

الحدود المتشابهة والحدود المتساوية .

التعريف	الحدود متشابهة	الحدود متساوية
هي الحدود التي لها نفس المتغير مرفوعة لنفس الأس .	هي الحدود التي لها نفس المتغير مرفوعة لنفس الأس .	هي حدود متشابهة بمعاملات متساوية .
أمثلة	(١) $٤س^٢$ ، $١/٤س^٢$ ، $٣س^٢$ ، $٣س^٢$ (٢) $٣ص$ ، $-٥ص$ (٣) $٣ع$ ، $-٣ع$	(١) $٣س^٢$ ، $٣س^٢$ (٢) $١/٤ص$ ، $١/٤ص$ (٣) $٣ع$ ، $٣ع$

تدرّب (٥) :

حدد الحدود المتشابهة والمتساوية في ما يلي :

- ١ $\frac{1}{3}ع^٥ص$ ، $-صع^٥$ متشابهة
- ٢ $٤ك^٣$ ، $-٣,٠ك$ ، $\frac{1}{٦}ك^٢$ غير متشابهة
- ٣ $٧س^٤$ ، $٢س^٤$ ، $-س^٤$ متشابهة
- ٤ $س^٢ل$ ، $س^٢ل$ غير متشابهة
- ٥ $-٥س^٢ص$ ، $-٥ص^٣س^٢$ متساوية
- ٦ $٥,٠س^٢ص$ ، $\frac{1}{٢}صس^٢$ متساوية

ملاحظة :

يمكن كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب (تصاعدي - تنازلي) حسب درجتها، ولكن عند ترتيب كثيرة الحدود بمنغير واحد تنازليًا حسب درجتها يسمى هذا بالصورة القياسية.

مثل : $٧ + ٤ع^٣ - ٥ع^٢ + ٢ع + ٧$

تدرّب (٦) :

اكتب كثيرات الحدود التالية بالصورة القياسية، وحدد درجتها :

درجة الحدودية	الصورة القياسية	الحدودية
الدرجة الثالثة	$ص^٣ + ص^٢ - ٢ص$	$ص^٢ - ٢ص + ص^٣$
الدرجة الرابعة	$س^٤ - س^٤ + ٥س - ٧$	$٥س + ٧ - س^٤ - س^٤$
الدرجة الخامسة	$٨ + ٤ع + ٣ع - ٤ع + ٤ع$	$٨ + ٤ع + ٣ع - ٤ع + ٤ع$
الدرجة الخامسة	$٥ص^٣ + ٤ص^٣ + ٤ص^٣ - ٤ص^٣ - ٥ص^٣$	$-٥ص^٣ + ٤ص^٣ + ٤ص^٣ - ٤ص^٣ - ٥ص^٣$

تدرّب (٧) :

١ أوجد قيمة كل من كثيرات الحدود التالية عندما $s = 3$ ، $v = -2$:

أ $\frac{1}{3}s^3 + 2v^2 + 25$

$\frac{1}{3} \times 3^3 + 2 \times (-2)^2 + 25 =$

$\frac{1}{3} \times 27 + 2 \times 4 + 25 =$

$9 + 8 + 25 = 42$

ب $3v^3 - 2s^4 - 50$

$3 \times (-2)^3 - 2 \times 3^4 - 50 =$

$3 \times (-8) - 2 \times 81 - 50 =$

$-24 - 162 - 50 = -236$

٢ إذا كانت $s = 7$ ، $v = 7$ ، $n = 3$

أي المقادير الآتية صحيحة بحيث يكون الناتج ١٤ ؟

أ $s \times (v + n)$

ب $s \times v \times n$

ج $(v + n) \div s$

د $n \times v - s$

تمرّن :

١ ظلّل أ إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

أ	ب	كثيرة حدود	$3s^0 - \frac{1}{s} + 4$
ب	أ	ليست كثيرة حدود	$\sqrt{s} - \sqrt[3]{s} + \frac{2}{8}s$
ب	أ	حدان جبريان متساويان	$-\frac{3}{5}s^3 - 6, 0, s^3$

٢ صل من القائمة (أ) ما يناسبها من القائمة (ب) :

(أ) الحدودية	(ب) الدرجة
$\frac{1}{2}ص - ع$	الثالثة
$ص^2ع - \frac{1}{3}ص + ١$	الرابعة
$س^2 - \frac{2}{5}ص^3 + س ص^2$	الأولى
$٥ل^٥ + ل + ل^٤ - ل^٦$	السادسة
	الثانية

٣ رتب الحدود الجبرية التالية حسب ما هو موضح في الجدول التالي :

٦ س^٢ ص ، $\frac{1}{٣}ص^٣$ ، - ص س^٢ ، ٤ س ص^٢ ، $\frac{2}{5}ص^٢$ ، - ٧

حدود متشابهة	حدود غير متشابهة
٦ س ^٢ ص ، - ص س ^٢ ، $\frac{2}{5}ص^٢$ ، ٤ س ص ^٢ ، - ٧	$\frac{1}{٣}ص^٣$

٤ ضع الحدوديات التالية في الصورة القياسية ، ثم حدد درجة الحدودية :

أ $٥س^٥ - ٤س^٣ + ٦س$

$٥س^٥ - ٤س^٣ + ٦س$

الدرجة الخامسة

ب $٧ - ٤ص^٣ + ٥ص^٢ + ص^٤$

$٧ - ٤ص^٣ + ٥ص^٢ + ص^٤$

الدرجة الرابعة

ج $٤ع - ٦ + ٢ع^٣$

$٤ع - ٦ + ٢ع^٣$

الدرجة الثالثة

د $٢س - ٥س^٢ + \frac{1}{2}$

$٢س - ٥س^٢ + \frac{1}{2}$

الدرجة الثانية

إذا كانت $٢ + ٣ = ٥$ ، $ج = ٤$ فما قيمة $٣ + ٣(ب + ج)$ ؟

$$٥ + ٣(٣ + ٤) = ٥ + ٣ \times ٧ = ٥ + ٢١ = ٢٦$$

$$٢٦ = ١٥ + ٥ = ٤ \times ٣ + ٥ =$$

٦ أوجد قيمة كثيرات الحدود التالية :

أ - $٤س^٢ + \frac{١}{٣}س + ٥ + ٢س^٣$ ، عندما $س = ٢$

$$٤ \times ٢^٢ + \frac{١}{٣} \times ٢ + ٥ + ٢ \times ٢^٣ = ١٦ + \frac{٢}{٣} + ٥ + ١٦ = ٣٧ + \frac{٢}{٣} = ٣٧\frac{٢}{٣}$$

$$٦ = ١٦ + ٦ + ١٦ =$$

ب - $سص^٢ + \frac{٣}{٤}ص^٢س - ٩$ ، عندما $س = ٤$ ، $ص = ١$

$$١ \times ٤^٢ + \frac{٣}{٤} \times ٤^٢ \times ١ - ٩ = ١٦ + ١٢ - ٩ = ١٩$$

تم التحميل من



٧ كتبت أمينة لغزاً هو عبارة عن أرقام خزنتها ، وأرادت

من ابنتها رغد معرفة رقم الخزانة وهو عبارة عن

٣س^٣ص + $\frac{١}{٣}س - ٥$ ، عندما $س = ٣$ ، $ص = ١$.

ساعد رغد على فتح الخزانة .

$$٣ \times ٣^٣ \times ١ + \frac{١}{٣} \times ٣ - ٥ = ٢٧ + ١ - ٥ = ٢٣$$

٨ إذا كانت $س - ص = ٤$ ، احسب قيمة $(س - ص)^٢ - ٢(س - ص)$

$$٨ = ٨ - ١٦ = ٤ \times ٤ =$$

٩ لدى سامي ضعف عدد الكتب التي مع جاسم ، ومع حسن ستة كتب زيادة عن التي

مع جاسم ، فإذا كان مع جاسم س كتاب ، فأأي العبارات الرياضية الآتية تمثل

عدد جميع الكتب التي مع الأولاد الثلاثة ؟

- ٤س + ٦ (ب) ٣س + ٨ (ج) ٨س + ٢ (د) ٣س + ٦

جمع كثيرات الحدود وطرحها Adding and Subtracting Polynomials

٣-٩



سوف تتعلم : جمع كثيرات الحدود وطرحها .

نشاط (١) :



سوف نستخدم البطاقات الجبرية لنمذجة كثيرات الحدود ، بفرض أن :



العبارات والمفردات :

حدود متشابهة

Like Terms

مبسط

Simplified

سنستخدم هذه البطاقات لنمذجة الحدوديات كما في المثال التالي :



$$-س^2 + ٣س - ١$$



$$٢س^2 - (س - ٣) + ١$$

تدريب (١) : www.school-kiv.com

أ) اكتب كثيرة الحدود التي تمثل النموذج التالي :



$$-س^2 - ٢س - ٤$$

ب) نمذج كثيرة الحدود $٢س^3 - ٢س^2 + ٤س - ١$ مستخدمًا البطاقات .



جمع كثيرات الحدود

نشاط (٢) :

سوف نستخدم البطاقات الجبرية لنمذجة كثيرات الحدود ، بفرض أن :

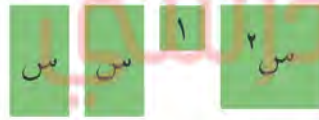


$$\boxed{\begin{matrix} 1- \\ 1- \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 3 \\ س \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 2 \\ س \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 2 \\ س \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 2 \\ س \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}$$

١ بالضم احذف الأزواج الصفرية :



٢ اكتب النمذجة التي حصلت عليها :



٣ رتب النمذجة التي حصلت عليها في الصورة القياسية :



٤ عبّر عن النمذجة بحدودية : $s^2 + 3s + 2$

٥ لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود المتشابهة :

$$[(2-) + 3س + 2س] + [3 + (س -) + 2س]$$

$$\dots = (2-3) + (3س + 2س) + (س - 2س) =$$

لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود المتشابهة معًا .

تذكّر أن :

أزواج صفرية :



مثال (١) :

أوجد ناتج جمع كثيرات الحدود التالية :

$$2س^3 + 4س - 6 \quad \text{مع} \quad 5س^3 + 2س^2 - 2س + 2$$

الحل :

الطريقة الرأسية :

$$\begin{array}{r} 2س^3 + 4س - 6 \\ + 5س^3 + 2س^2 - 2س + 2 \\ \hline 7س^3 + 2س^2 + 2س - 4 \end{array}$$

اجمع الحدود
المتشابهة

الطريقة الأفقية :

$$\begin{aligned} & (2س^3 + 4س - 6) + (5س^3 + 2س^2 - 2س + 2) \\ & = (2س^3 + 5س^3) + (2س^2) + (4س - 2س) + (-6 + 2) \\ & = 7س^3 + 2س^2 + 2س - 4 \end{aligned}$$

تدرّب (٢) :

١) اجمع الحدوديات التالية :

١) $3س^3 + 2س^2 - 4س - 7$ ، $5س^2 - 10س + 4$ ، $8س^3 - 2س^2 + 5س - 8$

(أكتب الحدودية بالصورة القياسية ، ثم أجمعها بالطريقة الرأسية) .

$$\begin{array}{r} 3س^3 + 2س^2 - 4س - 7 \\ + 5س^2 - 10س + 4 \\ + 8س^3 - 2س^2 + 5س - 8 \\ \hline 11س^3 + 5س^2 - 9س - 11 \end{array}$$

ب) $6س^3 - 1$ ، $2س^2 - 4س + 5$ ، $3س^3 - 7س^2 + 5س - 4$

$$\begin{array}{r} 6س^3 - 1 \\ + 2س^2 - 4س + 5 \\ + 3س^3 - 7س^2 + 5س - 4 \\ \hline 9س^3 - 5س^2 + 1س + 0 \end{array}$$

٢) ناتج : $3س^2 + 2س + 2س^2 + 2س + 3س$

أ) ٨س ب) ٨س^٢ ج) ٥س^٢ + ٣س د) ٧س^٢ + ٥س

طرح كثيرات الحدود

تدرّب (٣) : 

أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

م	كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
١	$٣س٢ - ٥س - ٢$	$-(٣س٢ - ٥س - ٢) = ٣س٢ + ٥س + ٢$
٢	$٤س٢ - ٩س + ٥س٠$	$-(٤س٢ - ٩س + ٥س٠) = -٤س٢ + ٩س - ٥س٠$
٣	$٧ - ١٠س٤ - ٦س٣$	$-(٧ - ١٠س٤ - ٦س٣) = -٧ + ١٠س٤ + ٦س٣$

تذكر أنّ :

- المعكوس الجمعي للعدد ٣ هو -٣
- المعكوس الجمعي لـ ٥ هو -٥
- المعكوس الجمعي لـ ٣ هو ٣
- المعكوس الجمعي لـ ٥ هو -٥

لطرح كثيرات الحدود نضيف المعكوس الجمعي للمطروح .

مثال (٢) :

أوجد ناتج ما يلي :

$$(٦س٣ - ٢س٢ + ٤) - (٣س٣ - ٥س٢ - ٣)$$

الحل :

الطريقة الأفقية :

• نكتب المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود الثانية :

$$-(٣س٣ - ٥س٢ - ٣) = -٣س٣ + ٥س٢ + ٣$$

• نجمع الحدودية الأولى ومعكوس الحدودية الثانية :

$$(٦س٣ - ٢س٢ + ٤) + (-٣س٣ + ٥س٢ + ٣)$$

$$= (٦س٣ - ٣س٣) + (-٢س٢ + ٥س٢) + (٤ + ٣)$$

$$= ٣س٣ + ٣س٢ + ٧$$

الطريقة الرأسية :

• نكتب المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود الثانية :

$$-(٣س٣ - ٥س٢ - ٣) = -٣س٣ + ٥س٢ + ٣$$

• نجمع الحدودية الأولى ومعكوس الحدودية الثانية :

$$٦س٣ - ٢س٢ + ٤$$

$$-٣س٣ + ٥س٢ + ٣$$

$$\hline ٣س٣ + ٣س٢ + ٧$$

نرتب الحدود المتشابهة
ثم نجمعها .

نجمع الحدود
المتشابهة .

نرتب الحدود تنازلياً
(أو تصاعدياً) نضع
الحدود المتشابهة أسفل
بعض رأسياً .

تدرّب (٤) :

أ اطرح ٣ ص ٤ - ٢ ص ٣ - ٥ ص من ١٢ ص ٣ - ٤ ص ٢ + ٢ ص ٤

المعكوس الجمعي (-٣ ص ٤ + ٣ ص ٢ + ٤ ص ٥)

$$-٤ ص ٢ + ١٢ ص ٣ + ٢ ص ٤$$

$$٣ ص ٤ + \dots + ٢ ص ٣ + ٤ ص ٥$$

$$٤ ص ٤ + ١٤ ص ٣ + ٤ ص ٥$$

ب من ٢ ص ٢ - س ١ + اطرح - س ٣ + ٢ ص ٢ -

المعكوس الجمعي (س ٣ - ٢ ص ٢ + س ١)

$$= (٢ ص ٢ - س ١) - (س ٣ - ٢ ص ٢ + س ١)$$

$$= (٢ ص ٢ - س ١) + (٢ ص ٢ - س ٣ + س ١)$$

$$= (٢ ص ٢ + س ١) + (٢ ص ٢ - س ٣ + س ١) = (٢ ص ٤ - س ٢ + س ٢)$$

تمرّن :

١ اجمع كثيرات الحدود التالية :

أ ٢ ص ٢ + ٥ ص ٢ - ٣ ص ٣ ، ٣ ص ٣ - ٢ ص ٢ + ١٠

$$٢ ص ٢ + ٥ ص ٢ - ٣ ص ٣ + ٣ ص ٣ - ٢ ص ٢ + ١٠$$

$$+ ٣ ص ٣ - ٣ ص ٣ + ١٠$$

$$١٠ + ٣ ص ٣ - ٢ ص ٢ + ٦$$

ب ٤ ص ٢ + ٢ ص ٣ + ٦ ، ٤ ص ٢ + ٣ ص ٣ - ٧

$$١ - ٣$$

ج ٣ ص ٦ + ٥ ص ٦ - ٣ ص ٦ ، ٧ ص ٦ - ٣ ص ٦ ، ٨ + ٢ ص ٦

$$٣ ص ٦ + ٥ ص ٦ - ٣ ص ٦ + ٧ ص ٦ - ٣ ص ٦ + ٨ + ٢ ص ٦$$

د ٤ ص ٢ + ١ ص ٣ ، ٣ ص ٥ + ٢ ص ٣ - ٣ ص ١ ، ١ ص ٤ - ١ ص ٤

$$٤ ص ٢ + ١ ص ٣ + ٣ ص ٥ + ٢ ص ٣ - ٣ ص ١ + ١ ص ٤ - ١ ص ٤$$

$$٣ ص ٥ + ٢ ص ٣ + ١ ص ٤ - ١ ص ٤$$

$$١ ص ٤ - ١ ص ٤$$

$$٣ ص ٥ + ١ ص ٤ + ٣ ص ٣ + ١ ص ٤ - ١ ص ٤$$

٢ اكتب المعكوس الجمعي لكثيرات الحدود التالية :

المعكوس الجمعي	كثيرة الحدود
$-\left(\frac{1}{2}s^2 - 3s - 2\right) = \frac{1}{2}s^2 + 3s + 2$	$\frac{1}{2}s^2 - 3s - 2$
$-\left(\frac{3}{5}s^3 - \frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{4}s - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}s^3 - \frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{4}s - \frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}s^3 + \frac{2}{3}s^2 - \frac{1}{4}s + \frac{1}{5}$
$-\left(s^3 - 5s + 1\right) = -s^3 + 5s - 1$	$s^3 - 5s + 1$
$-\left(7s^2 + 6s - 2\right) = -7s^2 - 6s + 2$	$7s^2 + 6s - 2$

٣ أوجد ناتج ما يلي :

أ $3s^3 - 2s^2 + 7s - (2s^3 - 3s^2 + 5s)$ معكوس

$$\begin{array}{r} 3s^3 - 2s^2 + 7s \\ - (2s^3 - 3s^2 + 5s) \\ \hline s^3 + s^2 + 2s \end{array}$$

ب $6s^2 - 5s + 10 - (10s^2 - s - 15)$ معكوس

$$\begin{array}{r} 6s^2 - 5s + 10 \\ - (10s^2 - s - 15) \\ \hline -4s^2 - 4s + 25 \end{array}$$

٤ اطرح :

أ $5s^2 + 6s - 1 - (4s^2 - 14s + 2)$ معكوس

$$\begin{array}{r} 5s^2 + 6s - 1 \\ - (4s^2 - 14s + 2) \\ \hline s^2 + 20s - 3 \end{array}$$

ب $3s^3 - 9s^2 + 4s - 3 - (9s^3 + 2s^2 - 9s + 9)$ معكوس

$$\begin{array}{r} 3s^3 - 9s^2 + 4s - 3 \\ - (9s^3 + 2s^2 - 9s + 9) \\ \hline -6s^3 - 11s^2 + 13s - 12 \end{array}$$

ضرب كثيرات الحدود Multiplying Polynomials

٤-٩



سوف تتعلم: ضرب كثيرات الحدود .



نشاط (١) :



أراد أحمد أن يشتري سجادة ليضعها في صالة المنزل ،
ففكر بعدة أبعاد للسجادة وإيجاد مساحتها كما في الجدول .
أكمل الجدول التالي :

مساحة الشكل	الطول × العرض	العرض	الطول
٢ س	٢ × س	٢	س
٢ س	٢ س × س	س	٢ س
١٤ س	٦ س × ٢ س	٢ س	٦ س

ملاحظة :

ضرب قوى لأساسات
متشابهة :

عند ضرب قوى

لأساسات متشابهة

نجمع الأسس .

$$5^2 \times 2^2 = 2^4 \times 5^2$$

حيث $2 \neq 5$ ،

$2 \times 5 = 10$

ب) باب على شكل مستطيل طوله س قدم ، وعرضه
ص قدم ، وفي منتصفه نافذة زجاجية مستطيلة الشكل ،
طولها ٣ أقدام وعرضها قدمان ، أي العبارات التالية
يبين المساحة المدهونة من الباب بوحدة
القدم المربعة ؟

أ) $س + ص - ٦$ ب) $س ص + ٦$

ج) $س ص - ٦$ د) $س + ص + ٦$



تذكر أن :

الخاصية التوزيعية

للضرب على الجمع

$$= ٢ \times (س + ص) =$$

$$(س \times ٢) + (ص \times ٢)$$

تدرب (١) :

أوجد ناتج ما يلي :

١) $٥ س^٢ \times ٧ س^٣ = (٧ \times ٥) \times (س^٢ \times س^٣) = ٣٥ س^٥$

٢) $٣ س^٤ \times (٥ س^٣ - ٧ س^٢) = (٥ س^٣ - ٧ س^٢) \times ٣ س^٤ = ١٥ س^٧ - ٢١ س^٦$

يمكنك أن تضرب وحيدة حدّ في وحيدة حدّ ، قد تساعد خاصية التوزيع في أن
تضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود .

تدرّب (٢)

أكمل:

$$(2 \text{ س}^2) \times (8 \text{ س}^4 + 3 \text{ س})$$

$$= (2 \text{ س}^2 \times 8 \text{ س}^4) + (2 \text{ س}^2 \times 3) = 16 \text{ س}^6 + 6 \text{ س}^2$$

والآن ، يمكنك أيضًا إيجاد ناتج ضرب كثيرة حدود في أخرى حيث توجد طريقتان لإجراء عملية الضرب : الطريقة الرأسية والطريقة الأفقية . يمكنك استخدام أي منهما في الحل .

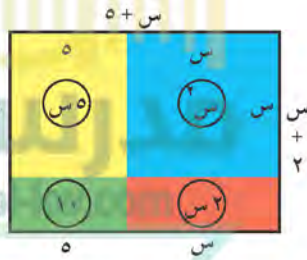
تدرّب (٣)

بسط المقدار التالي :

$$4(2 + \text{س}) - (3 + \text{س}) + 5(1 - \text{س})$$

$$8 + 8 \text{ س} - 3 - \text{س} + 5 - 5 \text{ س} = 10 - 4 \text{ س}$$

مثال (١) :



في الشكل المقابل مستطيل بعده (س + ٥) ،
(س + ٢) أوجد مساحة المستطيل :

الحل :

نقسم المستطيل إلى أربعة أجزاء كما في الشكل المقابل .

مساحة الشكل = الطول × العرض

• الطريقة الثانية : الرأسية

$$\begin{array}{r} 5 + \text{س} \\ \times 2 + \text{س} \\ \hline 10 + 2 \text{ س} \\ + 5 \text{ س} + 2 \text{ س}^2 \\ \hline 10 + 7 \text{ س} + 2 \text{ س}^2 \end{array}$$

• الطريقة الأولى : الأفقية

$$(5 + \text{س})(2 + \text{س})$$

$$= (2 + \text{س})5 + (2 + \text{س})\text{س}$$

$$= (2 \times 5) + (\text{س} \times 5) + (2 \times \text{س}) + (\text{س} \times \text{س})$$

$$= 10 + 5 \text{ س} + 2 \text{ س} + 2 \text{ س}^2$$

$$= 10 + 7 \text{ س} + 2 \text{ س}^2$$

تذكّر أنّ :

مربع س = س^٢
ضعف س = ٢ س

تدرّب (٤)

أوجد ناتج (س + ٤) (س + ٣) = (س + ٣) ٤ + (س + ٣) س

$$= 12 + 4 \text{ س} + 3 \text{ س} + 3 \text{ س}^2$$

$$= 12 + 7 \text{ س} + 3 \text{ س}^2$$

تدرّب (٥) :

أكمل لإيجاد ناتج ما يلي :

$$\text{أ} \quad (٥ + \text{ص}) (٥ - \text{ص})$$

$$= \text{ص} (٥ - \text{ص}) + (٥ - \text{ص}) (٥ - \text{ص})$$

$$= \text{ص}^2 - ٥\text{ص} + ٥\text{ص} - ٢٥$$

$$= \text{ص}^2 - ٢٥$$

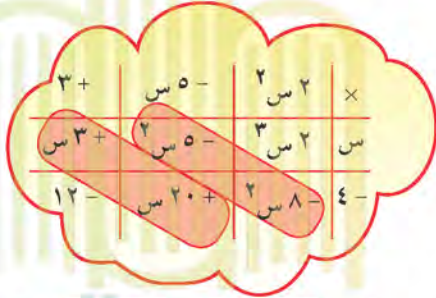
$$\text{ب} \quad ٢ \text{ س}^٢ - ٥ \text{ س} + ٣$$

$$\times \text{س} - ٤$$

$$٢ \text{ س}^٣ - ٥ \text{ س}^٢ + ٣ \text{ س}$$

$$+ ٨ \text{ س}^٢ - ٢٠ \text{ س} - ١٢$$

$$٢ \text{ س}^٣ - ١٣ \text{ س}^٢ + ٢٣ \text{ س} - ١٢$$



$$٢ \text{ س}^٣ - ١٣ \text{ س}^٢ + ٢٣ \text{ س} - ١٢ =$$

تم التحميل من

موقع مدرستي

مثال (٢) :

أوجد مربع $(٣ + \text{س})$ = $(٣ + \text{س})^٢$

الحل :

$$(٣ + \text{س}) (٣ + \text{س})$$

$$= ٩ + ٣ \text{ س} + ٣ \text{ س} + ٢ \text{ س}^٢$$

$$= ٩ + ٦ \text{ س} + ٢ \text{ س}^٢$$

لاحظ في مثال (٢) السابق :

$(٣ + \text{س})^٢$ هي مربع الحدانية $(٣ + \text{س})$ حيث :

س هي الحد الأول ، ٣ هي الحد الثاني ،

٢ س هي مربع الحد الأول ،

٩ هي مربع الحد الثاني ،

٦ س هي ضعف الحد الأول \times الحد الثاني .


الصورة القياسية

$$\text{مربع } (س \pm ص) = (س \pm ص)^2$$

$$= س^2 \pm 2سص + ص^2$$

حدودية ثلاثية على صورة مربع كامل

$$= \text{مربع الحد الأول} \pm \text{ضعف الحد الأول} \times \text{الحد الثاني} + \text{مربع الحد الثاني}$$

تدرّب (٦)  :

أ) أوجد $(ص - ٧)^2$:

$$\left[\begin{array}{c} \text{مربع الحد} \\ \text{الثاني} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{ضعف الحد} \\ \text{الأول} \\ \times \\ \text{الحد الثاني} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{مربع الحد} \\ \text{الأول} \end{array} \right] =$$

$$ص^2 - 2 \times ٧ \times ص + ٧^2 =$$

$$ص^2 - ١٤ص + ٤٩ =$$

ب) $(٢ + ٥ب)^2$ 

$$\left[\begin{array}{c} \text{مربع الحد} \\ \text{الثاني} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{ضعف الحد} \\ \text{الأول} \\ \times \\ \text{الحد الثاني} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{مربع الحد} \\ \text{الأول} \end{array} \right] =$$

$$= (٢ب)^2 + 2(٢ \times ٥ب) + ٢^2 =$$

$$= ٤ب^2 + ٢٠ب + ٤ =$$

فكر وناقش 

ما التشابه والاختلاف بين ناتج $(س + ٥)^2$ و $(س - ٥)^2$ ؟

مثال (٣) :

شبه مكعب أبعاده هي : (٥ + س) ، (٢ - س) ، (س) وحدة طول .
أوجد حجمه .

الحل :

حجم شبه المكعب = حاصل ضرب أبعاده

$$= (س) \times (٢ - س) \times (٥ + س)$$

$$= س \times [(٢ - س) \times ٥ + (٢ - س) \times س]$$

$$= س \times [١٠ - ٥س + ٢س - ٢س]$$

$$= س \times [١٠ - ٣س + ٢س]$$

$$= ٣س - ٢س + ١٠س \text{ وحدة مكعبة}$$

تم التحميل من



تمرّن :

١ مساحة المستطيل المجاور هي :

أ $س^٢ + ٢س$

ب $س^٢ + ٢س + ٤$

ج $٢س + ٢$

د $٤س + ٤$

٢ أوجد ناتج كل مما يلي :

أ $٢س \times ٣س^٢$

ب $(٣س \times ٤س) \times (٤س \times ٣س)$

ج $٦س^٣$

د $(٣ص^٢ + ص - ٢) \times (٢ - ص)$

هـ $(٣ص^٢ - ٤ص + ١) + (٤ص - ٣ص^٢) + (٣ص^٢ - ٤ص)$

و $٦ص^٣ - ٤ص^٢ + ٤ص$

ز $(٧ + س)(٥ - س)$

ح $٣س^٢ - ٥س + ٧س - ٣٥$

ط $٣س^٢ + ٤س - ٣٥$

ب $\frac{١}{٢}س \times \left(\frac{٣}{٢} + س - \frac{٢}{٣}س^٢ - ٤س \right)$

$\frac{٣}{٢}س \times \frac{٣}{٢} + س \times \frac{٣}{٢} - \frac{٢}{٣}س^٢ \times \frac{١}{٢}س - ٤س \times \frac{١}{٢}س$
 $\frac{٩}{٤}س + \frac{٣}{٢}س - \frac{٢}{٣}س^٣ - ٢س^٢$

د $(٢س + ٣ع)^٢$

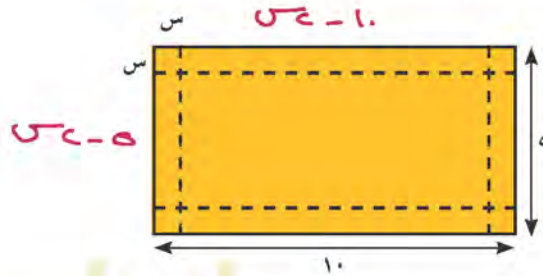
$٤س^٢ + ١٢س + ٩ع$

و $(ب - پ)(ب + پ)$

$\frac{ب - پ}{ب + پ} \times \frac{ب + پ}{ب - پ}$
 $\frac{ب^٢ - پ^٢}{ب^٢ - پ^٢} = ١$

٣ أوجد مربع كل حدانية في ما يلي :

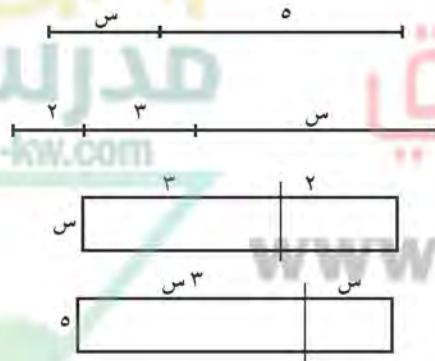
أ (س - ٤) = ٤س - ٨س + ١٦ (ب) (٣ - ٢ - ٢) = ٤س - ١٢س + ٤س + ٤



٤ أرادت شيما صنع علبة من دون غطاء مستخدمة قطعة من الورق المقوى بعدها ١٠ وحدة طول ، ٥ وحدة طول ، وذلك بنزع مربع طول ضلعه س وحدة طول من كل زاوية من زوايا القطعة . ما حجم علبة شيما ؟

الطول = ١٠ - س العرض = ٥ - س الارتفاع = س
الحجم = الطول × العرض × الارتفاع = (١٠ - س) (٥ - س) (س)
= ٤س^٣ - ٣٠س^٢ + ١٥٠س - ٥٠٠

٥ أي مما يلي يمثل التعبير ٢س + ٣س ؟



أ طول القطعة المستقيمة

ب طول القطعة المستقيمة

ج مساحة الشكل

د مساحة الشكل

٦ إذا كانت $س^٢ = ١٦$ ، $ص^٢ = ٤$ ، فإن أكبر قيمة للمقدار $(س - ص)^٢ =$

- أ ٤ ب ١٢ ج ١٦ د ٣٦

٧ أي مما يلي يساوي $٢(س + ع) - (٢س - ع)$ ؟

- أ ٣ع ب ع ج ٤س + ٣ع د ٤س + ٢ع

قسمة كثيرة حدود على حد جبري Dividing a Polynomial by a Monomial

٥-٩



سوف تتعلم : قسمة حد جبري على حد جبري آخر ، قسمة كثيرة حدود على حد جبري

نشاط (١) :



باستخدام قسمة الأعداد النسبية وما تعلمته من ضرب و قسمة الأسس ، أكمل الجدول .

الحد الأول ÷ الحد الثاني (الحد الثاني ≠ ٠)	الحد الثاني	الحد الأول
$\frac{15}{5}$	٥	١٥
$\frac{4s^4}{s^2}$	s^2	$4s^4$
$\frac{5s^5}{6}$	٦	$5s^5$
$\frac{2s^2}{3s^3}$	s^3	$2s^2$
$\frac{15s^4}{3s^2}$	$3s^2$	$15s^4$
$\frac{4s^2}{2s^3}$	$2s^3$	$4s^2$

school-kw.com

تدرّب (١) :

أ) أوجد ناتج قسمة $8s^4v^3$ على $4s^2v^3$.

$$\frac{8s^4v^3}{4s^2v^3} = 2s^2v^3$$

ب) أوجد ناتج قسمة $5e^2l^4$ على $15e^6l$.

$$\frac{5e^2l^4}{15e^6l} = \frac{e^2l^3}{3e^4}$$

ملاحظة :
المقام في جميع الحلول لا يساوي صفرًا .

العبارات والمفردات :

قسمة حد جبري

Dividing a Monomial

قسمة كثيرة حدود

Dividing a Polynomial

معلومات مفيدة :

تُستخدم قسمة كثيرات الحدود عند الكيميائيين في صناعة الأدوية .



تذكّر أن :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

حيث $a \neq 0$

إذا أردنا أن نقسم كثيرة حدود على حد جبري ، نقسم كل حد من كثيرة الحدود على هذا الحد الجبري .

مثال (١) : اقسم $(6s^4 + 3s^3 - 12s^2)$ على $3s^2$.

الحل :

اقسم كل حد على المقسوم عليه بسط

$$\frac{6s^4 + 3s^3 - 12s^2}{3s^2} = \frac{6s^4}{3s^2} + \frac{3s^3}{3s^2} - \frac{12s^2}{3s^2} = 2s^2 + s - 4$$

تدرّب (٢) :

أقسم (٦ س^٥ + ٨ س^٤ - ٢ س^٢) على س^٢

$$\frac{6 \text{ س}^5 + 8 \text{ س}^4 - 2 \text{ س}^2}{\text{س}^2} = \frac{6 \text{ س}^3}{\text{س}^2} + \frac{8 \text{ س}^2}{\text{س}^2} - \frac{2 \text{ س}^0}{\text{س}^2}$$

تمرّن :

١ اختصر ما يلي :

$$\begin{array}{l} \text{أ} \quad \frac{\text{س}^5}{\text{س}^3} = \text{س}^2 \\ \text{ب} \quad \frac{6 \text{ س}^4}{2 \text{ س}^2} = 3 \text{ س}^2 \\ \text{ج} \quad \frac{8 \text{ س}^3}{8 \text{ س}^3} = 1 \\ \text{د} \quad \frac{10 \text{ س}^2}{25 \text{ س}^5} = \frac{2}{5 \text{ س}^3} \end{array}$$

٢ اقسم : ٦ س^٢ ص^٣ + ١٢ س^٤ ص^٤ - ١٨ س^٥ ص^٢ على ٦ س^٢ ص^٢

$$\begin{array}{l} = \frac{6 \text{ س}^2 \text{ ص}^3 + 12 \text{ س}^4 \text{ ص}^4 - 18 \text{ س}^5 \text{ ص}^2}{6 \text{ س}^2 \text{ ص}^2} \\ = \frac{6 \text{ س}^2 \text{ ص}^3}{6 \text{ س}^2 \text{ ص}^2} + \frac{12 \text{ س}^4 \text{ ص}^4}{6 \text{ س}^2 \text{ ص}^2} - \frac{18 \text{ س}^5 \text{ ص}^2}{6 \text{ س}^2 \text{ ص}^2} \\ = \text{ص} + 2 \text{ س}^2 \text{ ص}^2 - 3 \text{ س}^3 \end{array}$$

٣ أوجد ناتج $\frac{5 \text{ س}^2 \text{ ص}^3 + 3 \text{ س}^3 \text{ ص}^2 - 5 \text{ س}^2 \text{ ص}^2}{15 \text{ س}}$

$$\frac{5 \text{ س}^2 \text{ ص}^3 + 3 \text{ س}^3 \text{ ص}^2 - 5 \text{ س}^2 \text{ ص}^2}{15 \text{ س}} = \frac{5 \text{ س}^2 \text{ ص}^3}{15 \text{ س}} + \frac{3 \text{ س}^3 \text{ ص}^2}{15 \text{ س}} - \frac{5 \text{ س}^2 \text{ ص}^2}{15 \text{ س}}$$

٤ مساحة مستطيل هي (٣ س^٢ - ٢ س) مترًا مربعًا، عرض هذا المستطيل س مترًا،

أوجد طول هذا المستطيل .

$$\text{الطول} = \frac{\text{المساحة}}{\text{العرض}} = \frac{3 \text{ س}^2 - 2 \text{ س}}{\text{س}} = \frac{3 \text{ س}^2}{\text{س}} - \frac{2 \text{ س}}{\text{س}} = 3 \text{ س} - 2 \text{ متر}$$

مراجعة الوحدة التاسعة
Revision Unit Nine

٦-٩

١ اختصر :

$$\begin{array}{l} \text{أ} \quad (22\text{ب}) (2\text{ب}^2) = 4\text{ب}^4 \\ \text{ب} \quad \frac{9\text{ب}^3}{2\text{ب}} = \frac{9\text{ب}^2}{2} \\ \text{ج} \quad \frac{24\text{ع}^2\text{ل}}{6\text{ص}^2} = \frac{4\text{ع}^2\text{ل}}{\text{ص}^2} \\ \text{د} \quad \frac{8\text{ب}^7}{2\text{ب}^4} = 4\text{ب}^3 \end{array}$$

٢ احسب قيمة كل من كثيرات الحدود التالية عندما $s = 2$:

$$\begin{array}{l} \text{أ} \quad 2\text{س}^2 - 3\text{س} + 5 \\ \text{ب} \quad 3\text{س}^3 - 2\text{س} + 7 \\ \text{ج} \quad \frac{1}{16}\text{س}^4 + \frac{3}{4}\text{س}^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 + 2 - 3 + 7 = 11 \\ 3(8) - 2(2) + 7 = 17 \\ \frac{1}{16}(16) + \frac{3}{4}(4) = 2 \end{array}$$

٣ اجمع كثيرات الحدود التالية :

$$\begin{array}{l} \text{أ} \quad 2\text{س}^2 + 6\text{س} - 4 \\ \text{ب} \quad 5\text{س} - 2\text{س}^2 + 4 \\ \text{ج} \quad 5\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 6\text{س} - 9 \end{array}$$

$$8\text{س}^2 + 12\text{س} - 8$$

$$\text{ب} \quad 2\text{ص}^3 - 4\text{ص}^2 + 9, \quad 3\text{ص}^3 + 3\text{ص}^2 - 9, \quad 5\text{ص}^3 - 3\text{ص}^2$$

$$(9-9) + (5\text{ص}^3 - 3\text{ص}^2 + 3\text{ص}^3 + 3\text{ص}^2 - 3\text{ص}^2 - 3\text{ص}^2) = 8\text{ص}^3 - 3\text{ص}^2$$

٤ اطرح $2\text{ص}^2 - 3\text{ص}^3 + 2$ من $5\text{ص}^3 + 6\text{ص}^2 - 1$

$$5\text{ص}^3 + 6\text{ص}^2 - 1 - (2\text{ص}^2 - 3\text{ص}^3 + 2) = 8\text{ص}^3 + 4\text{ص}^2 - 3$$

$$8\text{ص}^3 + 4\text{ص}^2 - 3$$

$$8\text{ص}^3 + 4\text{ص}^2 - 3$$

$$8\text{ص}^3 + 4\text{ص}^2 - 3$$

٥ من ٤ هـ م + ٣ هـ م + ٧ اطرح هـ م + هـ م + ٧

$$\begin{array}{r} ٧ + ٣ هـ م + ٤ هـ م \\ ٧ - ٣ هـ م - ٤ هـ م \\ \hline ٣ هـ م + ٣ هـ م \end{array}$$

٦ أوجد ناتج :

أ $(٩ - س)(٤ + س) = ٣٦ - ٤س - ٩س = ٣٦ - ٤س - ٩س$

ب مربع $(س + ١) = (س + ١)(س + ١) = س٢ + ٢س + ١$

ج $(٧ - ٢٤ - ٢٥)(٣ + ٢٢) = ٣٦ - ٢٤س - ٢٥س - ١١٠ = ٣٦ - ٤٩س - ١١٠$

$٣٦ - ٤٩س - ١١٠ = ٣٦ - ٤٩س - ١١٠$

٧ اقسام : ٤ س^٣ ص^٢ + ١٦ س^٢ ص^١ + ٣٦ س^١ ص^٠ على ٤ س^٢ ص^١

$$\frac{٤ س٣ ص٢ + ١٦ س٢ ص١ + ٣٦ س١ ص٠}{٤ س٢ ص١} = \frac{٤ س٣ ص٢}{٤ س٢ ص١} + \frac{١٦ س٢ ص١}{٤ س٢ ص١} + \frac{٣٦ س١ ص٠}{٤ س٢ ص١}$$

$= س + ٤ + \frac{٩س}{٤ س}$

٨ اقسام : ١٥ س^٢ ص^٣ - ١٢ س^٣ ص^٢ + ٩ س^٤ ص^١ على ٦ س^٢ ص^١

$$\frac{١٥ س٢ ص٣ - ١٢ س٣ ص٢ + ٩ س٤ ص١}{٦ س٢ ص١} = \frac{١٥ س٢ ص٣}{٦ س٢ ص١} - \frac{١٢ س٣ ص٢}{٦ س٢ ص١} + \frac{٩ س٤ ص١}{٦ س٢ ص١}$$

٩ منطقة مستطيلة مساحتها $(٢ س + ١٢ س - ٤ س)$ وحدة مربعة وعرضها

٢ س وحدة طول أوجد طولها .

$$\frac{٢س + ١٢س - ٤س}{٢س} = \frac{٢س + ١٢س - ٤س}{٢س} = \frac{١٠س + ٢س}{٢س} = \frac{١٢س}{٢س} = ٦$$

$٦ س = ١٢ س - ٤ س + ٢ س$

اختبار الوحدة التاسعة

أولاً: في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

(ب)	<input checked="" type="radio"/>	١ ناتج $\left(\frac{س٥}{س٢}\right) = ١$ ، حيث $س \neq ٠$
<input checked="" type="radio"/>	(أ)	٢ $س٣ - \frac{١}{س} + ٤$ كثيرة حدود
<input checked="" type="radio"/>	(أ)	٣ ناتج جمع $س٣$ ، $س٥$ هو $س٨$
<input checked="" type="radio"/>	(أ)	٤ $-٢٤ع٦ن٦$ ، $\pi ن٦ع٦$ ، $\frac{٣}{٥} ع٦ن٦$ حدود مُتشابهة

ثانياً: لكل بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة :

٥ المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود $س٢ + س٣ - ٤$ هو :

(أ) $س٢ - س٣ - ٤$ (ب) $س٢ - س٣ + ٤$

(ج) $س٢ + س٣ - ٤$ (د) $س٢ + س٣ + ٤$

٦ $س٣ (س٢ - ٥) =$

(أ) $س٦ - ٥$ (ب) $س٦ - ١٥$ (ج) $س٦ + ٥$ (د) $س٦ - ١٥$

٧ $\frac{س٦ - س٣}{س٣} =$

(أ) $س٢$ (ب) $س٢ - س٣$ (ج) $س٢ - ١$ (د) $\frac{١}{س٢}$


٨ ناتج جمع ٤س ٤ + ٣س ٤ - ٢س ٢ - ٢ ، ٢س ٢ + ٣س ٣ - ٣س ٤ - ١ =

أ ٧س ٣ + ٢س ٥ - ٢س ٢ + ٣س ٧ ~~ب~~

ج ٤س ٣ - ٢س ٥ - ٢س ٢ + ٣س ٦ ~~د~~

٩ = (٣س ٤ + ص ٣) - (٣س ٤ - ص ٣)

أ ٦س ٨ - ص ٨ ~~ب~~ ٦س ٨ + ص ٨ ~~ج~~ ٦س ٨ ~~د~~

١٠ التعبير الجبري المكافئ للتعبير ٥ + ٢ ن هو: 

أ ٢ + ٢ ن + ٣ ~~ب~~ (١ + ٢ ن) + ن

ج ٧ ن ~~د~~ $\frac{١٥ + ٦ ن}{٣}$



تم التحميل من

موقع مدرستي

www.school-kw.com

الوحدة العاشرة

تحليل مقادير جبرية

Factorising Algebraic Expressions

العلم والحياة

Education and Life



مشروع الوحدة :
(مزرعتي)



العلم هو الفكر الناتج عن دراسة سلوك وشكل وطبيعة الأشياء مما يؤدي إلى الحصول على معرفة عنها . فللعلم أهمية كبيرة في حياة الإنسان حيث إنه ساهم في تطور العديد من الأشياء وقدم الكثير من الاختراعات التي أدت إلى تطور البشرية وزيادة ازدهارها . مثال على ذلك ، التطور والازدهار الذي شهده مجال الزراعة .



ص ٨

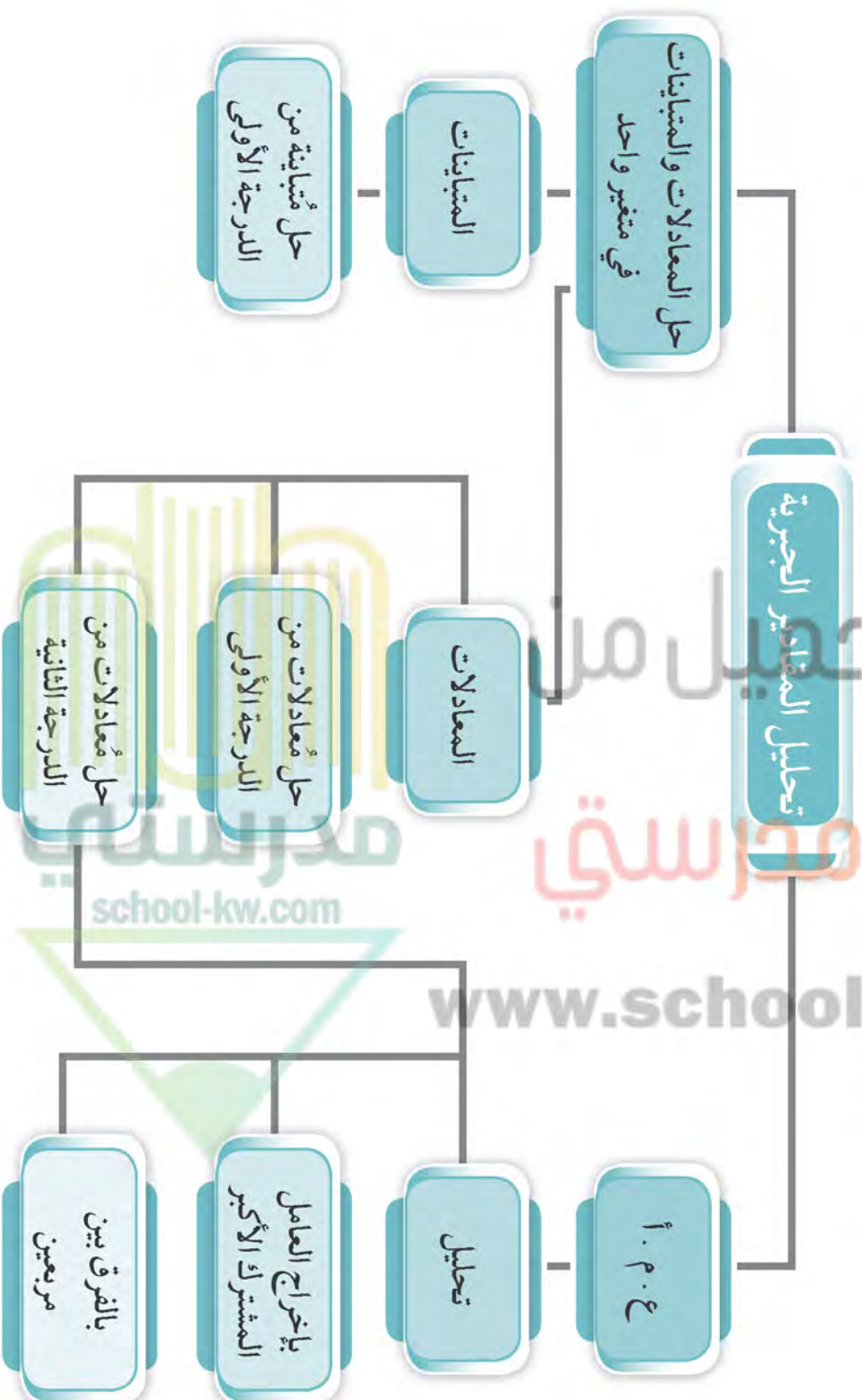
موقع مدرستي

ص

خطوات تنفيذ المشروع :

- إيجاد (المساحة المتبقية) من مساحة معطاة .
 - تستعين كل مجموعة بمعلم الصف للقيام بما يلي :
 - تحدد الشكل الهندسي لكل من (الأرض الزراعية - أرض المنزل) في الشكل المقابل .
 - توجد المجموعة مساحة كل من :
(أ) الأرض الزراعية (ب) أرض المنزل .
 - توجد مساحة الأرض المتبقية بعد بناء المنزل عليها بالاستعانة بالتحليل .
 - توجد مساحة الأرض المتبقية عندما ص = ٢٥ متر ، س = ٢٠ مترًا .
- علاقات وتواصل :**
- مناقشة المجموعات خطوات إعداد المشروع .
- عرض العمل :**
- كل مجموعة تعرض حلها ثم تناقش المجموعات الحلول وتصحح الأخطاء .

مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



school-kw.com

www.school-kw.com

العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ.) Greatest Common Factor (GCF)

١-١٠

سوف تتعلم : إيجاد (ع.م.أ.) لحددين أو أكثر - كثيرات حدود .

نشاط :



يمكننا إيجاد العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ.) للعددين ١٨ ، ٣٠ بطريقتين . أكمل ما يلي :

الطريقة الأولى : (عوامل العدد)

عوامل ١٨ هي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨

عوامل ٣٠ هي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٣٠

العوامل المشتركة بينهما هي : ١ ، ٣ ، ٦

فإن العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ.) للعددين ١٨ ، ٣٠ هو ٦

الطريقة الثانية : (التحليل بالعوامل الأولية)

$$١٨ = ٢ \times ٣ \times ٣$$

$$٣٠ = ٢ \times ٣ \times ٥$$

فإن العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ.) للعددين ١٨ ، ٣٠ هو $٢ \times ٣ = ٦$

وظف ما سبق في إيجاد (ع.م.أ.) للحدود الجبرية في الجدول التالي :

ع.م.أ. للحدود	عوامل الحدود الجبرية	الحدود الجبرية
س	$س \times س \times س \times س = س^٤$	س ، س ^٤
ص ^٣	$ص \times ص \times ص \times ص \times ص = ص^٥$	ص ^٢ ، ص ^٣ ، ص ^٥
ن	$ن \times ن \times ن \times ن \times ن \times ن = ن^٦$	ن ^٢ ، ن ^٣ ، ن ^٤ ، ن ^٦

العبارات والمفردات :

عامل مشترك

Common Factor

العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ.)

Greatest Common Factor (GCF)

معلومات مفيدة :

يستخدم الرسامون التحليل إلى (ع.م.أ.) في لوحاتهم الفنية لأهميتها في دقة الرسومات باللوحه كي تكون أكثر حرفية وجمالا .



تذكر أن :

- الأعداد الأولية هي : الأعداد التي لها عاملان فقط هما الواحد والعدد نفسه .
- (ع.م.أ.) للعددين أو أكثر هو أكبر عدد يكون عاملا مشتركا لعددين أو أكثر .
- العوامل الأولية للعدد ٦ هي : ٢ ، ٣ .

تدرّب (١) :

أ) أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للحددين ٨ ، ١٢ س .

نحلل الحددين إلى عواملهما الأولية .

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

$$12 \text{ س} = 2 \times 2 \times 3 \text{ س}$$

فيكون (ع . م . أ) = $2 \times 2 = 4$

∴ (ع . م . أ) للحددين ٨ ، ١٢ س هو ٤ .

ب) عيّن (ع . م . أ) للحددين ٤ س^٢ ، ١٢ س^٢ :

$$4 \text{ س}^2 = 2 \times 2 \times \text{س} \times \text{س}$$

$$12 \text{ س}^2 = 2 \times 2 \times 3 \times \text{س} \times \text{س}$$

$$\therefore \text{ع . م . أ} = 2 \times 2 \times \text{س} \times \text{س} = 4 \text{ س}^2$$

ج) عيّن (ع . م . أ) للحدود ١٤ س^٤ ، ٢١ ص^٢ ع^٢ ، ٧ س^٣ ص^٢ ع^٢ :

$$14 \text{ س}^4 = 2 \times 7 \times \text{س} \times \text{س} \times \text{س} \times \text{س}$$

$$21 \text{ ص}^2 \text{ ع}^2 = 3 \times 7 \times \text{ص} \times \text{ص} \times \text{ع} \times \text{ع}$$

$$7 \text{ س}^3 \text{ ص}^2 \text{ ع}^2 = 7 \times \text{س} \times \text{س} \times \text{ص} \times \text{ص} \times \text{ع} \times \text{ع}$$

$$\therefore \text{ع . م . أ} = 7 \text{ ص}^2 \text{ ع}^2$$

ملاحظة :

لإيجاد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) لمجموعة من الحدود الجبرية :
نأخذ العامل المُشترك في جميع الحدود بأصغر أس .

معلومات مفيدة :

- (١) تعتبر خوارزمية إقليدس في إيجاد العامل المشترك الأكبر واحدة من أقدم الخوارزميات الجارية الاستعمال ، ظهرت في كتاب الأصول لإقليدس عام ٣٠٠ ق . م تقريبًا .
- (٢) المهندس الزراعي يقوم بتحليل التربة (طينية - رملية - صخرية) لمعرفة نوع الزراعة المناسبة لها ولزراعة أنواع من الخضروات والفواكه والمحاصيل الموسمية .

تدرّب (٢)

أوجد (ع.م.أ) للحددين ٨ ب^٤ ج^٣ ، ٣٢ ب^٥ ج^٢
 ٨ ب^٤ ج^٣ = ٣٢ ب^٥ ج^٢
 ٣٢ ب^٥ ج^٢ = ٨ ب^٤ ج^٣
 ∴ (ع.م.أ) للحددين هو ٢ ب^٣ ج^٤

ب أوجد (ع.م.أ) لحدود المقدار ٣٥ ع^٣ ل^٢ + ١٤ ع^٤ ل^٢ - ٧ ع^٣ ل^٣
 ٣٥ ع^٣ ل^٢ = ٣٥ ع^٣ ل^٢ × ١ × ١ × ١
 ١٤ ع^٤ ل^٢ = ١٤ ع^٤ ل^٢ × ١ × ١ × ١
 ٧ ع^٣ ل^٣ = ٧ ع^٣ ل^٣ × ١ × ١ × ١
 ∴ (ع.م.أ) للمقدار هو ٧ ع^٣ ل^٣

تدرّب (٣)

أوجد (ع.م.أ) لحدود كلّ من المقادير التالية :

أ ٣ ن^٥ ع^٤ - ٩ ن^٥ ل^٣ + ٦ ن^٢ ل^٢
 ٣ ن^٥ ع^٤ = ٣ ن^٥ ع^٤ × ١ × ١ × ١ × ١
 ٩ ن^٥ ل^٣ = ٩ ن^٥ ل^٣ × ١ × ١ × ١
 ٦ ن^٢ ل^٢ = ٦ ن^٢ ل^٢ × ١ × ١ × ١
 ∴ (ع.م.أ) = ٣ ن^٥ ع^٤

ب ١٤ ص^٢ س^٥ + ٧ ل^٣ ص^٤ س^٢ + ٥ ل^٥ س^٤

١٤ ص^٢ س^٥ = ١٤ ص^٢ س^٥ × ١ × ١ × ١ × ١ × ١
 ٧ ل^٣ ص^٤ س^٢ = ٧ ل^٣ ص^٤ س^٢ × ١ × ١ × ١ × ١ × ١
 ٥ ل^٥ س^٤ = ٥ ل^٥ س^٤ × ١ × ١ × ١ × ١ × ١
 ∴ (ع.م.أ) = ٥ ل^٥ س^٤

تمرّن :

١ أوجد (ع.م.أ) لكل مما يلي :

<p>ب ٥ ص^٢ ، ص^٦ $٥ ص^٢ \times ٥ = ٥ ص^٤$ $ص^٦ = ص^٦$ $٥ ص^٢ = ٢٠ ص^٤$</p>	<p>أ ٢٧ ، ١٨ $٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٧$ $٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٧$ $٩ = ٣ \times ٣ = ٢٠ ص^٤$</p>
<p>د ٦ ص^٤ ، ٩ ص^٢ ، ٣ ص^٦ $٦ ص^٤ \times ٣ ص^٢ \times ٩ ص^٢ = ١٦٢ ص^٨$ $٩ ص^٤ \times ٣ ص^٢ = ٢٧ ص^٦$ $٣ ص^٦ = ٢٠ ص^٤$</p>	<p>ج ٨ ص^٤ ، ١٢ ص^٣ ، ١٦ $٨ ص^٤ \times ١٢ ص^٣ = ٩٦ ص^٧$ $١٦ ص^٤ = ٢٧ ص^٣$ $١٦ = ٢٧ ص^٣$</p>
<p>و ٢٩ ، ١٢ ، ٢ $٢٩ = ٢٠ ص^٤$</p>	<p>هـ ٤ ب^٢ ، ١٤ ب^٢ ، ٢٠ ب^٢ $٤ ب^٢ = ٢٠ ص^٤$</p>
<p>ح ١٠ ص^٤ ، ٤٠ ص^٢ $١٠ ص^٤ = ٢٠ ص^٤$</p>	<p>ز ٢٧ ب^٢ ن^٤ ، ١٨ ب^٢ ك^٢ ن^٣ $٢٧ ب^٢ ن^٤ = ٢٠ ص^٤$ $١٨ ب^٢ ن^٣ = ٢٠ ص^٤$</p>

٢ أوجد (ع.م.أ) لحدود المقادير التالية :

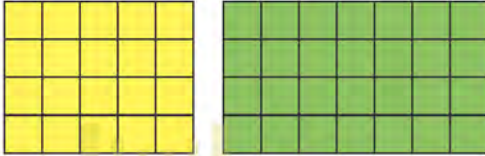
<p>ب ١٨ هـ^٣ ص^٤ - ٥٤ ل^٢ هـ^٢ $١٨ ه^٣ ص^٤ = ٥٤ ل^٢ ه^٢$ $٥٤ ل^٢ ه^٢ = ١٨ ه^٢ ل^٢$ $١٨ ه^٢ = ٢٠ ص^٤$</p>	<p>أ ٤٢ ص^٧ + ٦ ص $٤٢ ص^٧ + ٦ ص = ٤٢ ص^٧$ $٦ ص = ٦ ص$ $٤٢ ص^٧ = ٢٠ ص^٤$</p>
<p>د ٥ ص^٤ - ١٠ ص^٤ + ١٥ ص^٣ $٥ ص^٤ = ٥ ص^٤$ $١٠ ص^٤ = ١٠ ص^٤$ $١٥ ص^٣ = ١٥ ص^٣$ $٥ ص^٤ = ٢٠ ص^٤$</p>	<p>ج ١٤ ك^٢ ص^٥ س^٣ + ٧ ك^٣ ص^٣ س + ٢١ ك^٣ س $١٤ ك^٢ ص^٥ س^٣ = ١٤ ك^٢ ص^٥ س^٣$ $٧ ك^٣ ص^٣ س = ٧ ك^٣ ص^٣ س$ $٢١ ك^٣ س = ٢١ ك^٣ س$ $١٤ ك^٢ ص^٥ س^٣ = ٢٠ ص^٤$</p>

التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر Factorise Using The GCF

٢-١٠

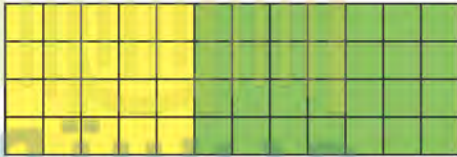
سوف تتعلم : التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر للتعبيرات الجبرية .

نشاط :



قال خالد لصديقه جاسم إنه يستطيع إيجاد مساحة المستطيلين المرسومين بطريقتين مختلفتين هما :

الطريقة الثانية :

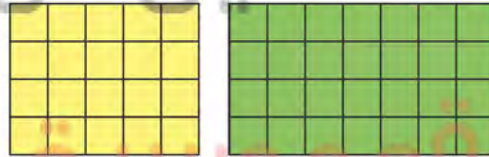


مساحة المستطيلين = $(5 + 7) \times 4$

$$12 \times 4 =$$

$$48 =$$

الطريقة الأولى :



مساحة المستطيلين = $(5 \times 4) + (7 \times 4)$

$$20 + 28 =$$

$$48 =$$

نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} & (5 + 7) \times 4 \\ & (5 \times 4) + (7 \times 4) = \end{aligned}$$

توزيع عملية الضرب على الجمع

$$(5 + 7) \times 4 = (5 \times 4) + (7 \times 4)$$

تحليل بأخذ العامل المشترك الأكبر

يسمى ٤ ، (٥ + ٧) عاملي المقدار $(5 + 7) \times 4$ ،

حيث ٤ هو العامل المشترك الأكبر للمقدار : (5×4) ، (7×4) ،

بصورة عامة :

$$a + b = a + b \quad , \quad a - b = a - b$$

ملاحظة : إنَّ المقدار بين القوسين ينتج من قسمة كل حد على (ع.م.أ) .

العبارات والمفردات :

عامل Factor

عامل أولي

Prime Factor

تحليل إلى عوامل أولية

Prime

Factorisation

معلومات مفيدة :

يستخدم التجارون التحليل في كثير من الأمور ، كتصميمهم للخزائن الخشبية المفرغة من الداخل ، وغيرها الكثير من الاستخدامات .



تذكّر أنّ :

الخاصية التوزيعية :

$s \times (b + c) =$

$s \times b + s \times c =$

مثال :

حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر للمقدار : $٢٤ + ٦ب - ٨ج$

الحل :

(١) (ع. م. أ.) للحدود هو ٢ نوجد (ع. م. أ.) بين حدود المقدار الجبري

(٢) $\frac{٢٤}{٢} - \frac{٦ب}{٢} + \frac{٨ج}{٢}$ نقسم كل حد من حدود المقدار على (ع. م. أ.)

$$= ١٢ - ٣ب + ٤ج$$

(٣) $(١٢ - ٣ب + ٤ج) \times ٢$ نضع المقدار الجبري على صورة حاصل ضرب عاملين

تدرّب (١) :

حلّل بإخراج العامل المشترك الأكبر :

أ $٨ص - ٤س$

(١) (ع. م. أ.) للحدين = $\frac{٤}{٤}$ $(٢) \left(\frac{٨ص - ٤س}{٤} \right) = ٢ص - س$

(٣) $٨ص - ٤س = ٤(٢ص - س)$

ب $٢٣ب + ٢٦ب$

(١) (ع. م. أ.) للحدين = $\frac{٢٣ب}{٢٣ب}$ $(٢) \left(\frac{٢٣ب + ٢٦ب}{٢٣ب} \right) = ٢٣ب + ٢٦ب$

(٣) $٢٣ب + ٢٦ب = ٢٣ب(١ + ٢٦)$

ج $٤س + ٦س - ٨س$

(١) (ع. م. أ.) للحدود = $\frac{٢س}{٢س}$

(٢) $\left(\frac{٤س}{٢س} - \frac{٦س}{٢س} + \frac{٨س}{٢س} \right)$

(٣) $٢س(٢ - ٣ + ٤)$

تدرّب (٢) :

حلّل المقادير الجبرية التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

أ $٩ص - ٣ص$

(١) (ع. م. أ.) للحدين = $\frac{٣ص}{٣ص}$

(٢) $٩ص - ٣ص = ٣ص(٣ - ١)$

(٣) $٩ص - ٣ص = ٣ص(٣ - ١)$

$$ب) ٤(س + ٣) + ص(س + ٣)$$

$$ع. م. أ) للحدود = س + ٣$$

$$٤(س + ٣) + ص(س + ٣) = (س + ٣)(٤ + ص)$$

تدرّب (٣) :

أ) حلّل المقدار $٢س^٢ + ٣س + ٣ص$ بإخراج العامل المشترك الأكبر.

$$ع. م. أ) للحددين = س$$

$$٢س^٢ + ٣س + ٣ص = س(٢س + ٣ + ٣ص)$$

ب) اكتب في أبسط صورة: $\frac{٢س^٢ + ٣س + ٣ص}{س}$ حيث $س \neq ٠$ ، $ص \neq ٠$

$$\frac{٢س^٢ + ٣س + ٣ص}{س} = \frac{س(٢س + ٣ + ٣ص)}{س}$$

باستخدام التحليل في (أ)

بالتبسيط

$$= ٢س + ٣ + ٣ص$$

فكر وناقش



التحدي:



الشكل المقابل مربع ، رُسمت دائرة نصف قطرها (نق) تماس أضلاع المربع من الداخل . أراد سعود أن يُعيّن مساحة المنطقة الحمراء بدلالة (نق) ثم أن يقوم بتحليل مقدار الناتج . ساعد سعود على حلها .

مثال :

حلل ما يلي تحليلًا تامًا:

$$س^٣ - س^٢ + ٢س - ٢$$

الحل :

$$س^٣ - س^٢ + ٢س - ٢$$

$$= (س^٣ - س^٢) + (٢س - ٢)$$

$$= س^٢(س - ١) + ٢(س - ١)$$

$$= (س - ١)(س^٢ + ٢)$$

تمرّن :

١ حلل المقادير التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع. م. أ.) :

ب $9س^2 + 3س^3 = 3س^2(3س + 1)$

أ $7ص + 7ص = 7ص(1 + 1)$

د $6س^3 + 8صس = 2س(3س^2 + 4ص)$

ج $س^2ص + سك = س(سص + ك)$

و $8س^2ص^3 - 12س^3ص = 4س^2ص(2ص - 3س)$

هـ $2ص^2س^2 - 2س = 2س(ص^2س - 1)$

ح $3ل^3ع^4 - 9ل^4ع^3 + 6ل^2ع^2 = 3ل^2ع^2(ل - 3ل^2ع + 2ع)$

ز $27س^3ص^0 + 9س^2ص^3 = 9س^2ص^3(3س + 1)$

ي $5س^4ص^0 - 10ص^4س^0 + 15ص^3س^2 = 5ص^3(س - 2ص + 3س^2)$

ط $4ك^2ص^3س^0 + 7كصس + 21كس = 7ك(2ص^3س + 2صس + 3س)$

ل $2ص - 2س + 2ص + 2س = 2(ص - س + ص + س)$

ك $(2-2)ص - (2-2)س = 0$

٢ اكتب المقادير التالية في أبسط صورة :

ب $\frac{3س^3 - 6س^2ص}{3س} = 3س^2 - 2ص$

أ $\frac{س^2 - 3س}{س} = س - 3$

٣ إذا كان : $ا + ب = 15$ ، فما هي قيمة $2ب + 2ا + 8$ ؟

$2(ا + ب) + 8 = 2(15) + 8 = 30 + 8 = 38$

$38 = 2(ا + ب) + 8 = 2(15) + 8 = 30 + 8 = 38$

تحليل الفرق بين مربعين Factorising the Difference of Two Squares

٣-١٠



سوف تتعلم : تحليل ثنائية الحد في صورة فرق بين مربعين .

نشاط :



أرض مصنع مربعة الشكل مساحتها s^2 وحدة مربعة يراد أخذ غرفة منها مربعة الشكل مساحتها v^2 وحدة مربعة لاستخدامها كمخزن .
احسب المساحة المتبقية من أرض المصنع .



من التمثيل السابق نجد أن :

في الشكل (أ) : يمثل قطعة الأرض التي مساحتها s^2 وموضع الغرفة المراد أخذها والتي مساحتها v^2 .

في الشكل (ب) : يمثل مساحة قطعة الأرض المتبقية من المصنع $(s^2 - v^2)$ ومقسمة إلى منطقتين :

- (١) منطقة مستطيلة بعدها s ، $(s - v)$ وحدة طول .
- (٢) منطقة مستطيلة بعدها v ، $(s - v)$ وحدة طول .

$$\text{مساحة قطعة الأرض المتبقية} = \text{مساحة القطعة (١)} + \text{مساحة القطعة (٢)}$$

$$= s(s - v) + v(s - v)$$

$$(s^2 - v^2) = (s + v)(s - v) \text{ وحدة مربعة}$$

عمومًا :

الفرق بين مربعين كميتين يساوي حاصل ضرب مجموع الكميتين في الفرق بينهما .

$$\text{أي أن : } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

العبارات والمفردات :

فرق بين مربعين

Difference of Two Squares.

تحليل الفرق بين مربعين

Factorising The Difference of Two Squares

تذكّر أن :

- مساحة المستطيل = الطول × العرض
- مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

معلومات مفيدة :

يستعمل مُصممو الأثاث التحليل إلى العوامل في تحديد أبعاد مساحة الغرف كي يستطيعوا تنظيم عملية توزيع الأثاث .



مثال (١) :

حلل $s^2 - 4$ ، ثم تحقق من صحة إجابتك :

الحل :

لاحظ أن : s^2 مربع s ، كذلك 4 مربع 2

$$s^2 - 4 = (s - 2)(s + 2)$$

$$= (s - 2)(s + 2)$$

التحقق : اضرب $(s + 2)(s - 2)$

$$(s + 2)(s - 2) = s^2 - 2s + 2s - 4 = s^2 - 4$$

$$= s^2 - 4$$

تمرين التحميل من



تدرّب (١)

حلل ما يلي تحليلًا تامًا :

ب $25s^2 - 4e^2$
 $25s^2 - 4e^2 = (5s - 2e)(5s + 2e)$

أ $16v^2 - 4c^2$
 $16v^2 - 4c^2 = (4v - c)(4v + c)$

د $36k^2 - 4l^2$
 $36k^2 - 4l^2 = (6k - 2l)(6k + 2l)$

ج $81h^2 - 4a^2$
 $81h^2 - 4a^2 = (9h - 2a)(9h + 2a)$



تدرّب (٢)

حلل ما يلي تحليلًا تامًا :

ب $22j^2 - 18$
 $22j^2 - 18 = 2(j^2 - 9) = 2(j - 3)(j + 3)$

أ $s^3 - s$
 $s^3 - s = s(s^2 - 1) = s(s - 1)(s + 1)$

فكر وناقش

يرى يوسف أن $ص^2 + ص^2$ يمكن تحليلها إلى $(ص + ص)(ص + ص)$.
فهل توافقه الرأي؟ فسّر ذلك.

تدرّب (٣)

حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا:

$$١٠٠ - ٢(٢ - ص)^2 \quad \text{أ}$$

$$٢(١٠) - ٢(٢ - ص)^2 =$$

$$(١٠ - ٢ - ص)(١٠ + ٢ - ص) =$$

$$(٨ - ص)(١٢ - ص) =$$

$$٢٥ - (٧ + ن)^2 \quad \text{ب}$$

$$((٧ + ن) - ٥)((٧ + ن) + ٥) =$$

$$(٢ + ن)(١٢ + ن) =$$

تدرّب (٤)

أوجد قيمة ما يلي بالتحليل:

$$٢(٧) - ٢(٩٣) \quad \text{أ}$$

$$(٧ - ٩٣)(٧ + ٩٣) =$$

$$٨٦ \times ١٠٠ =$$

$$٨٦٠٠ =$$

$$٢(٤,٥) - ٢(٢٥,٥) \quad \text{ب}$$

$$(٤,٥ - ٢٥,٥)(٤,٥ + ٢٥,٥) =$$

$$٢١ \times ٣٠ =$$

$$٦٣٠ =$$

مثال (٢):

حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا:

$$ص^2(ص + ١) - ٤(ص + ١)$$

الحل:

$$ص^2(ص + ١) - ٤(ص + ١)$$

$$(ص + ١)(ص^2 - ٤) =$$

$$(ص + ١)(ص - ٢)(ص + ٢) =$$

تدرّب (٥)  :

حلّ ما يلي :

أ ٢٥ س ٢ - $\frac{٢٥}{٣٦}$ ص ٢

٢ ($\frac{٥٠}{٦}$ ص) - ٢ (٥ س) =


($\frac{٥٠}{٦}$ ص - ٥ س) ($\frac{٥٠}{٦}$ ص + ٥ س) =

ب $\frac{١٦}{٢٥}$ هـ ٢ - $\frac{١}{٩}$ س ٢

٢ ($\frac{١٦}{٥}$ هـ) - ٢ ($\frac{١}{٣}$ س) =
 $(\frac{١٦}{٥} + \frac{١}{٣}) (\frac{١٦}{٥} - \frac{١}{٣}) =$

فكر وناقش

هل $(٨ + ص + س)(٨ - ص + س)$ يمثلان عاملين لفرق بين مُربعين؟
فسر ذلك.

تدرّب (٦)  :



يلجأ مُصممو الأثاث إلى مفاهيم الرياضيات في تصميماتهم وذلك للخروج بنتائج دقيقة ، حيث وضع المُصمم عبد المحسن سجادة مستطيلة الشكل بعدها س ، ٢ س ثم وضع فوق هذه السجادة طاولة طعام مستطيلة الشكل بعدها ص ، ٢ ص حيث $(س < ص)$.

أ اكتب تعبيراً جبرياً يبين مساحة القطعة المتبقية من السجادة مستخدماً س ، ص ، ثم حلّ هذا التعبير .

مساحة القطعة المتبقية من السجادة = مساحة السجادة - مساحة الطاولة

٢ س \times س - ص \times ص =

..... ص - ص =

٢ = (..... ص - ص)

٢ = (..... ص - ص) (..... ص + ص)

ب أوجد المساحة المتبقية من السجادة إذا كان س = ٣ وحدات طول ، ص = ٢ وحدة طول

المساحة المتبقية = ٢ (..... ص - ص) (..... ص + ص)

= ٥×١٠ = وحدات مربعة

تمرّن :

١ أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

أ $س^2 - ١٠٠ = (س + ١٠)(س - ١٠)$

ب $٤ص^2 - ٤٩ = (ص + ٧)(ص - ٧)$

ج $٢٥س^2 - ٩ = (س + ٣)(س - ٣)$

د $١٦ - ٩ = (٣ - ٤)^2$

٢ حلّل ما يلي تحليلاً تامّاً ثم تحقق من صحة إجابتك :

ب $١٠٠ - ٢٥٠$

$(١٠ - ١٠٠)(١٠ + ١٠٠)$

التحقّق: $١٠٠ - ٢٥٠ = (١٠ - ١٠٠)(١٠ + ١٠٠)$

$١٠٠ - ٢٥٠ =$

أ $٢٥ - ٢٥٠$

$(٥ - ٢٥٠)(٥ + ٢٥٠)$

التحقّق: $٢٥ - ٢٥٠ = (٥ - ٢٥٠)(٥ + ٢٥٠)$

$٢٥ - ٢٥٠ =$

٣ حلّل ما يلي تحليلاً تامّاً :

ب $٣٦ - ٢٤$

$٤(٩ - ٣)$

$٤(٣ + ٣)(٣ - ٣)$

أ $١ - ٢ص$

$(١ - ٢ص)(١ + ٢ص)$

د $٤٩ن - ٨١ك$

$(٧ن - ٩ك)(٧ن + ٩ك)$

ج $٤س^2 - ٩ص^2$

$(٣ص - ٢س)(٣ص + ٢س)$

و $٣٦ - ٤٩$

$٩(٤ - ٤٩)$

$٩(٤ + ٤٩)(٤ - ٤٩)$

هـ $١٠٠ - ٢س^2$

$٤(٥ - ٢س)$

$٤(٥ + ٢س)(٥ - ٢س)$

ز $٧٥ - ٢م٣$

$(٣٥ - ٢م)٣$

$(٣ + ٥)(٣ - ٥)٣$

ح $٢س - ١٨س٣$

$٢س(١ - ٩س٢)$

$٢س(١ - ٩س٢)(١ + ٩س٢)$

٤ حل ما يلي تحليلًا تامًا :

أ $٤٩ - ٢(١ + م)$

$(٧ - (١ + م))(٧ + (١ + م))$

$(٦ - م)(٨ + م)$

ب $٢(٠, ١٦) - ٢(٠, ٤ - ن)$

$(٠ - ن - ٤)(٠ - ن + ١٦)$

$(٠ - ن - ٤)(٠ - ن + ١٦)$

٥ أوجد قيمة ما يلي بالتحليل :

أ $٢(١١٤) - ٢(١١٥)$

$(١١٤ - ١١٥)(١١٤ + ١١٥)$

$١ \times ٢٢٩ = ٢٢٩$

ب $١ - ٢(٩٩)$

$(١ - ٩٩)(١ + ٩٩)$

$١ \times ٩٨ = ٩٨$

ج $٢(٢٠٩) - ٢(٢١٠)$

$(٢٠٩ - ٢١٠)(٢٠٩ + ٢١٠)$

$١ \times ٤١٩ = ٤١٩$

د $٢(٤٢, ٣) - ٢(٥٧, ٧)$

$(٤٢ - ٥٧)(٤٢ + ٥٧)$

$١٥٤ \times ١ = ١٥٤$

٦ حل ما يلي تحليلًا تامًا :

أ $\frac{٢س٤}{٩} - \frac{١}{٣}$

$(\frac{٢س٤}{٣} - \frac{١}{٣})(\frac{٢س٤}{٣} + \frac{١}{٣})$

ب $\frac{١}{٢٥} - \frac{١}{٤}$

$(\frac{١}{٢٥} - \frac{١}{٤})(\frac{١}{٢٥} + \frac{١}{٤})$

ج $١٢١ - ٢(م٤ - ٥)$

$(١١ - م٤ - ٥)(١١ + م٤ - ٥)$

$(٣ - م٤)(١٦ - م٤)$

$٤(٣ - م٤)(٣ + م٤)$

$٤(٣ - م٤)(٣ + م٤)$

د $\frac{١}{٤} - ٢٥٤$

$(\frac{١}{٤} - ٢٥٤)(\frac{١}{٤} + ٢٥٤)$

حل معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد

Solving a First Degree Equation With One Variable

١٠-٤

سوف تتعلم: كيفية حل معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

نشاط :

مما سبق دراسته أكمل حل المعادلات التالية، حيث $s \in \mathbb{R}$.

<p>أ) $s + 5 = 7$</p> <p>س + 5 = 7</p> <p>س = 2</p>	<p>ب) $s - 3 = 14$</p> <p>س - 3 = 14</p> <p>س = 17</p>
<p>ج) $2s = 10$</p> <p>س = 5</p>	<p>د) $s = \frac{8}{6}$</p> <p>س = 1.33</p>

تدريب (١):
يعرض أحد مواقع الإعلانات فستاناً بتصميم معين بمبلغ ١٢ ديناراً، يضاف إليه ٣ دنانير مقابل خدمة التوصيل إلى المشتري، فإذا أرادت ندى أن تشتري عددًا من الفساتين بمبلغ ٧٥ ديناراً، فكم فستاناً يمكن أن تشتري؟



الحل :

نفرض أن عدد الفساتين هو s فستاناً .

أكمل :

$$12s + 3 = 75$$

$$12s - 75 = 75 - 75$$

$$12s = 72$$

$$s = \frac{72}{12} = 6$$

$$s = 6$$

∴ عدد الفساتين التي اشترتها ندى هو 6 فساتين .

العبارات والمفردات :

معادلة
Equation
متغير
Variable
عملية عكسية
Inverse
Property

معلومات مفيدة :

يعتمد عمل كاميرات المرور لحساب سرعة السيارات المخالفة على معادلات مبرمجة داخلها، وتقوم الكاميرا بحساب الزمن الذي تقطعه السيارة خلال المسافة التي ترصدها ومنها تعين السرعة وتحدد إن كانت السيارة مخالفة أم لا حسب حدود السرعة المسموح بها .



تدرّب (٢)

أوجد حل المعادلات التالية حيث $s \in \mathbb{R}$:

أ $3s - 18 = 4 - s$

$3s - 18 = 4 - s + s$

$18 - 4 = 3s - s$

$14 = 2s$

$7 = s$

$\frac{14}{2} = \frac{2s}{2}$

$s = 7$

ب $5(s - 2) = 4$

$5s - 10 = 4$

$5s = 14$

$s = \frac{14}{5}$

$s = \frac{14}{5}$

فكر وناقش

لهذه المعادلة $5s - 2 = 6$ يوجد :

أ حلّ وحيد

ب عدد لانتهائي من الحلول

ج لا يوجد حلّ

د يوجد حلّان

تدرّب (٣)

أوجد حلّ المعادلة حيث $s \in \mathbb{R}$:

$\frac{38}{5} = s \frac{2}{3} + s \frac{3}{5}$

$\frac{38}{5} = s \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right)$

$\frac{38}{5} = s \left(\frac{10}{15} + \frac{9}{15} \right)$

$\frac{38}{5} = s \frac{19}{15}$

$s = \frac{38}{19}$

$s = 2$

مثال (١):

اكتب $0, \overline{6}$ على شكل كسر في أبسط صورة.

الحل:

استخدم متغيّرًا واجعله يساوي الكسر العشري المتكرر
اضرب الطرفين في ١٠ (لأن رقمًا عشريًا واحدًا يتكرر)

اطرح ن من الطرفين
عوّض. (تذكر أنّ $0, \overline{6} = ن$)

اقسم على ٩ لإيجاد قيمة ن
اكتب الكسر في أبسط صورة

$$\begin{aligned} 0, \overline{6} &= ن \\ 0, \overline{6} \times 10 &= ن \times 10 \\ 6, \overline{6} - &= 10ن \\ 10ن - 6, \overline{6} &= ن - 6, \overline{6} \\ 10ن - 6, \overline{6} &= 9ن \\ 6 &= 9ن \\ \frac{6}{9} &= \frac{9ن}{9} \\ \frac{2}{3} &= ن \\ \therefore 0, \overline{6} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

تذكّر أنّ:

المعكوس الجمعي
للعدد $+$ هو $(-)$
بـ $(-)$ + $(-)$
= صفر
المعكوس الضربي
للعدد $+$ هو $\frac{1}{+}$
بـ $\frac{1}{+} \times + = 1$

تم التحميل من

موقع مدرستي

مثال (٢):

اكتب $0, \overline{15}$ على شكل كسر في أبسط صورة:

الحل:

استخدم متغيّرًا واجعله يساوي الكسر العشري المتكرر
اضرب الطرفين في ١٠٠ (لأنّ رقمين عشريين يتكرران)

اطرح ن من الطرفين
عوّض. (تذكر أنّ $0, \overline{15} = ن$)

اقسم على ٩٩ لإيجاد قيمة ن
اكتب الكسر في أبسط صورة

$$\begin{aligned} 0, \overline{15} &= ن \\ 0, \overline{15} \times 100 &= ن \times 100 \\ 15, \overline{15} &= 100ن \\ 100ن - 15, \overline{15} &= ن - 15, \overline{15} \\ 100ن - 15, \overline{15} &= 99ن \\ 15 &= \\ \frac{15}{99} &= \frac{99ن}{99} \\ \frac{5}{33} = \frac{15}{99} &= ن \\ \therefore 0, \overline{15} &= \frac{5}{33} \end{aligned}$$

تمرّن :

١ حل كلاً من المعادلات التالية في \mathbb{R} ، ثم تحقق من صحة إجابتك :

أ $19 = 4 + 3ص$

$3ص + 4 = 19$

$3ص = 19 - 4$
 $ص = \frac{15}{3} = 5$

التحقق : $19 = 4 + 5 \times 3$

ب $11 = 19 + \frac{1}{3}ك$

$\frac{1}{3}ك = 19 - 11$

$\frac{1}{3}ك = 8$

$ك = 8 \times 3 = 24$

التحقق : $11 = 19 + \frac{1}{3} \times 24$

ب $5 = (7 - س) 2$

$5 = 14 - 2س$

$2س = 14 - 5$

$س = \frac{9}{2} = 4.5$

التحقق : $5 = \frac{9}{2} \times 2 = 9 - 4 = 5$

د $5 = (س + 2) 3$

$5 = 3س + 6$

$3س = 5 - 6$

$س = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

٢ قطعة خشبية كان يبلغ طولها ٤٠ سم قطعت إلى ثلاث قطع .

أطوال القطع الثلاث بالسنتيمتر هي :

$2س - 5$ ، $س + 7$ ، $س + 6$

ما هو طول القطعة الأكثر طولاً ؟

$40 = 2س - 5 + س + 7 + س + 6$

$40 = 4س + 8$

$4س = 40 - 8 = 32$
 $س = \frac{32}{4} = 8$

التابعة : $10 = 7 + 3$

التابعة : $14 = 6 + 8$

المقطع - الثانية لأطول

٣ اكتب كلاً ممّا يلي على شكل كسر في أبسط صورة موضّحاً خطوات الحل .

أ $\frac{3}{9}$

ليكن $ن = 9$

$1 \times 1 = 1$

$1 \times 3 = 3$

$1 \times 9 = 9$

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = 3$

ب $\frac{24}{99}$

ليكن $ن = 99$

$1 \times 1 = 1$

$1 \times 9 = 9$

$1 \times 99 = 99$

$\frac{24}{99} = \frac{8}{33}$

$\frac{8}{33} = 3$

تذكّر أنّ :

الخاصية التوزيعية
 $ا(س + ص) = اس + اص$

مدرستي
school.kw.com

موقع مدرستي
www.school.kw.com



يمثل ١٥ س + ١٠ أجرة مريم بعملة (الزد) ليوم عمل واحد في أحد المطاعم ،
س تمثل عدد الساعات التي تعملها مريم في اليوم . تأخذ مريم ١٠ زد في اليوم
بدل سفرها في الباص .

أ) ما الذي يمثله العدد ١٥ في التعبير الجبري ؟

عدد ساعات التي تعملها مريم

ب) عملت مريم يوم الأحد ٤ ساعات ، كم زدًا تأخذ ؟

$$١٥ \times ٤ + ١٠ = ٦٠ + ١٠ = ٧٠ \text{ زدًا}$$

ج) كم ساعة يجب أن تعمل مريم يوم الإثنين لكي تحصل على ١١٥ زد ؟

$$١٥ \text{ س} + ١٠ = ١١٥$$

$$٥ \text{ س} + ١٠ = ١١٥ - ١٠$$

$$\frac{١٠٥}{١٥} = \frac{١٠٥}{١٥}$$

$$\text{س} = ٧ \text{ ساعة}$$



٥) كلفة إيجار سيارة في اليوم الواحد هي ١٢ دينارًا
مضافًا إليها ٢٠ دينارًا بدل تأمين ثابت . في إحدى
المرات دفع جمال ١٢٨ دينارًا مقابل سيارة
استأجرها ، فكم يومًا استأجر جمال هذه السيارة ؟

نظرنه ان عدد الايام س

$$١٢ \text{ س} + ٢٠ = ١٢٨$$

$$١٢ \text{ س} + ٢٠ = ١٢٨ - ٢٠$$

$$\frac{١٠٨}{١٢} = \frac{١٠٨}{١٢} \Rightarrow \text{س} = ٩$$

$$\text{عدد الايام} = ٩ \text{ ايام}$$

٦ يقول سالم: أختي تبلغ من العمر ٤ أضعاف العمر الذي يبلغه أخي ، وعند جمع عمريهما معاً فإن المجموع يصبح ٢٠ . فكم عمر أخو سالم ؟

نصف عمر الاخ من سنة
عمر الاخت ٤ من سنة

$$٤ \text{ من } + \text{ من } = ٢٠$$

$$٥ \text{ من } = ٢٠$$

$$\text{من } = ٤ \quad \text{عمر الاخ} = ٤ \text{ سنوات}$$

٧ يبلغ راتب مدير في إحدى الشركات ٣ أمثال راتب موظف في الشركة نفسها مضافاً إليه ٦٠ ديناراً. إذا كان راتب المدير يساوي ١٣٦٥ ديناراً ، فكم يبلغ راتب الموظف ؟

نصف راتب الموظف من

$$\text{راتب المدير} = ٣ \text{ من } + ٦٠$$

$$٣ \text{ من } + ٦٠ = ١٣٦٥$$

$$٣ \text{ من } = ١٣٦٥ - ٦٠$$

$$٣ \text{ من } = ١٣٠٥ \Rightarrow \text{من } = \frac{١٣٠٥}{٣} = ٤٣٥ \text{ دينار}$$

٨ إذا كان ٢س - ١ = ٩ ، فما قيمة ١٠س - ٥ ؟

د) ٢٥

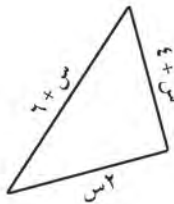
ج) ٤٥

ب) ٥٥

أ) ٧٥

٩ إذا كان مجموع أطوال أضلاع هذا المثلث = ٣٠ سم

فإن طول الضلع الأطول بالسنتيمتر =



د) ١٥

ج) ١٣

ب) ١٢

أ) ١١

حل معادلات من الدرجة الثانية فيه متغير واحد بالتحليل

٥-١٠

Solving Second Degree Equations with One Variable by Factorising

سوف تتعلم: حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل .

نشاط



طلّى أحمد الجزء العلوي والأيمن من حائط منزله المربع الشكل (انظر الصورة إلى اليسار) . أراد أن يحسب عرض الحائط س مع علمه أنّ المساحة المتبقية للطلّي هي ٥ أمتار مربعة .

١ أوجد مساحة الجزء المطلي $٥ = س \times س$ اعتبر مربعة

٢ أوجد المساحة الكلية للحائط بدلالة س . $س$

٣ أوجد المساحة المتبقية للطلّي بدلالة س . $س - ٤$

٤ اكتب معادلة المساحة المتبقية بدلالة س . $٥ = س - ٤$

٥ اكتب المعادلة في (٤) على صورة ضرب عاملين على أن يكون أحد طرفيها صفرًا . $١ = (س - ٣)(س + ٣)$

٦ أوجد عرض الحائط . $س = ٣$

٧ بعد إيجادك عرض الحائط ، ماذا تستنتج من المعادلة

$٠ = (س + ٣)(س - ٣)$ ؟ $س = ٣$ أو $س = -٣$

معلومات مفيدة :

يستخدم حل المعادلات التربيعية في مصانع إنتاج الصناديق الكرتونية .



العبارات والمفردات :

معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد
Second Degree Equation with One Variable
تحليل Factorise

ملاحظة :

لكل ١ ، $ب$ عدنان نسبيان ، إذا كان $١ = ب$ ، فإن $١ = ب$ أو $١ = ب$.

فمثلاً : إذا كان $٠ = (س + ٣)(س - ٢)$ ،

فإن $٠ = س + ٣$ أو $٠ = س - ٢$

مثال (١):

أوجد مجموعة حل المعادلة $(س + ٥)(س + ٦) = ٠$ ، حيث $س \in \mathbb{Z}$ ، ثم تحقق من صحة الحل .

الحل :

$$٠ = (س + ٥)(س + ٦)$$

$$\text{إما } ٠ = س + ٥$$

$$س = -٥$$

$$\therefore ٥- \in \mathbb{Z}$$

$$\text{أو } ٠ = س + ٦$$

$$س = -٦$$

$$\therefore ٦- \in \mathbb{Z}$$

\therefore مجموعة الحل = $\{-٦، -٥\}$

التحقق من صحة الحل :

عندما $س = -٥$ نعوض

$$٠ \stackrel{؟}{=} (-٥ + ٥)(-٥ + ٦)$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} ١ \times ٠$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} ٠$$

عندما $س = -٦$ نعوض

$$٠ \stackrel{؟}{=} (-٦ + ٥)(-٦ + ٦)$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} ٠ \times ١$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} ٠$$

تدرّب (١)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $(٣ص - ٥)(ص - ٢) = ٠$ ، حيث $ص \in \mathbb{Z}$ ، ثم تحقق من صحة الحل .

$$٠ = (٣ص - ٥)(ص - ٢)$$

$$\therefore \text{إما } ٣ص - ٥ = ٠$$

$$٣ص = ٥$$

$$ص = \frac{٥}{٣} ، \frac{٥}{٣} \in \mathbb{Z}$$

\therefore مجموعة الحل = $\{٢، \frac{٥}{٣}\}$

التحقق من صحة الحل :

$$\text{عندما } ٣ص = ٥$$

$$(٣ - \frac{٥}{٣})(٥ - \frac{٥}{٣} \times ٣)$$

$$٠ = \frac{١}{٣} - ٠$$

$$\text{عندما } ٣ص - ٥ = ٠$$

$$(٣ - ٢)(٥ - ٢ \times ٣)$$

$$٠ = ١ \times ١$$

ملاحظة:

المعادلتان:

$$س^2 - ٤ = ٠$$

$$س(س - ٢) = ٠$$

تسميان معادلتين

متكافئتين .

مثال (٢) :

أ) أوجد مجموعة حل المعادلة $س^2 - ٥س = ٠$ ، حيث $س \in \mathbb{R}$.

الحل :

$$س^2 - ٥س = ٠$$

$$س(س - ٥) = ٠$$

حلّ

حل معادلات من الدرجة الأولى

$$س = ٥ \quad \text{أو} \quad س = ٠$$

$$س = ٥ \quad \text{أو} \quad س = ٠$$

$$\frac{س}{٥} = \frac{س}{٥} \quad \text{أو} \quad س = ٠$$

$$س = ٠ \quad \text{أو} \quad س = ٠$$

$$س = ٠ \in \mathbb{R} \quad \text{أو} \quad س = ٠ \notin \mathbb{R}$$

∴ مجموعة الحل = $\{٠\}$

ب) أوجد مجموعة حل المعادلة $س^2 = ٤$ ، حيث $س \in \mathbb{R}$.

الحل :

$$س^2 = ٤$$

$$س^2 - ٤ = ٠$$

$$س(س - ٢) - ٢(س - ٢) = ٠$$

$$س(س - ٢) - ٢(س - ٢) = ٠$$

$$س(س - ٢) - ٢(س - ٢) = ٠$$

$$س(س - ٢) - ٢(س - ٢) = ٠$$

$$س(س - ٢) - ٢(س - ٢) = ٠$$

∴ مجموعة الحل = $\{٢، -٢\}$

ج) أوجد مجموعة حل المعادلة $س(س + ٣) - ١ = ٠$ ، حيث $س \in \mathbb{R}$.

الحل :

$$س(س + ٣) - ١ = ٠$$

$$س(س + ٣) - ١ = ٠$$

$$س(س + ٣) - ١ = ٠$$

$$س(س + ٣) - ١ = ٠$$

$$س(س + ٣) - ١ = ٠$$

$$س(س + ٣) - ١ = ٠$$

∴ مجموعة الحل = $\{\emptyset\}$

فكر وناقش

هل للمعادلة $s^2 + 4 = 0$ حل في \mathbb{R} (مجموعة الأعداد النسبية)؟ فسّر إجابتك.

تدرّب (٢)

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية:

أ $2m^2 - 5 = 0$ ، حيث $m \in \mathbb{R}$

$$2m^2 - 5 = 0$$

$$2(m^2 - \frac{5}{2}) = 0$$

$$2(m + \frac{\sqrt{10}}{2})(m - \frac{\sqrt{10}}{2}) = 0$$

إما $m = \frac{\sqrt{10}}{2}$ وهو مرفوض $m = (m + \frac{\sqrt{10}}{2}) = 0$ $\iff m = -\frac{\sqrt{10}}{2}$
 $m = (m - \frac{\sqrt{10}}{2}) = 0$ $\iff m = \frac{\sqrt{10}}{2}$

∴ مجموعة الحل = $\{-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\}$

ب $(2 + v)^2 - 9 = 0$ ، حيث $v \in \mathbb{R}$

$$0 = [(2 + v) - 3][(2 + v) + 3]$$

$$0 = (v - 1)(v + 5)$$

$$0 = (v - 1) \text{ أو } 0 = (v + 5)$$

$$v = 1 \text{ أو } v = -5$$

∴ مجموعة الحل = $\{1, -5\}$

تمرّن:

١ تحقق من أنّ:

أ $s = 1$ حلًا للمعادلة:

$$0 = (s - 1)^2$$

$$0 = (1 - 1)^2 = 0$$

ليس حل

ب $s = 1$ حلًا للمعادلة:

$$0 = (s + 4)(s - 1)$$

$$(1 + 4)(1 - 1)$$

$$0 = 5 \times 0$$

نعم حل

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية حيث $s \in \mathbb{P}$.

أ $0 = (s + 4)(s - 2)$

$$\begin{array}{l|l} s + 4 = 0 & s - 2 = 0 \\ s = -4 & s = 2 \end{array}$$

ح.م $\{ -4, 2 \}$

ب $0 = (s + 4)(s^2 + 10)$

$$\begin{array}{l|l} s + 4 = 0 & s^2 + 10 = 0 \\ s = -4 & s = \pm \sqrt{-10} \end{array}$$

ح.م $\{ -4, \pm \sqrt{-10} \}$

ج $0 = (s + 8)(s + 7)$

$$\begin{array}{l|l} s + 8 = 0 & s + 7 = 0 \\ s = -8 & s = -7 \end{array}$$

ح.م $\{ -8, -7 \}$

د $0 = (s + 2)(s - 5)$

$$\begin{array}{l|l} s + 2 = 0 & s - 5 = 0 \\ s = -2 & s = 5 \end{array}$$

ح.م $\{ -2, 5 \}$

٣ إذا كان $s - 4 = 9$ ، فما قيمة $s^2 - 4$ ؟

أ ٨١

ب ٩٧

ج ١٦٥

د ١٦٩

٤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية حيث $s \in \mathbb{R}$.

أ $s^3 - 27 = 0$ | $s = 9 - s^2$ | $s = 3$

$s = (s-3)(s+3) = 0$

أما $s = 3$ | $s = 3 - s$ | $s = 3 + s$
مرفوض | $s = 3 \Rightarrow s = 3$ | $s = 3 - s \Rightarrow s = -3$ | $s = 3 + s \Rightarrow s = 3$

ح.م $\{3, -3\}$

ب $(s+2)(25-s^2) = 0$ | $(s+5)(s-5)(s+2) = 0$

$s = (s-5)(s+5)(s+2) = 0$

$s = 3 - s$ | $s = 3$ | $s = 3 + s$
 $s = 3 \Rightarrow s = 3$ | $s = 3 - s \Rightarrow s = 3$ | $s = 3 + s \Rightarrow s = 3$

ح.م $\{3, -3, 5, -5\}$

ج $5s^2 = 80$ | $5s^2 - 80 = 0$ | $5(s-4)(s+4) = 0$

$s = (s-4)(s+4) = 0$

أما $s = 5$ | $s = 5 - s$ | $s = 5 + s$
مرفوض | $s = 5 \Rightarrow s = 5$ | $s = 5 - s \Rightarrow s = 5$ | $s = 5 + s \Rightarrow s = 5$

ح.م $\{5, -5, 4, -4\}$

د $81 = 2(9-s)$

$81 = 2(9-s) \Rightarrow 81 = 18 - 2s \Rightarrow 2s = 18 - 81 \Rightarrow 2s = -63 \Rightarrow s = -31.5$

$s = (18 - 2s) \Rightarrow 3s = 18 \Rightarrow s = 6$

$s = 18 - s$ | $s = s$
 $s = 18 - s \Rightarrow 2s = 18 \Rightarrow s = 9$

ح.م $\{9, 6, -31.5\}$

٥ مجموعة حل المعادلة $s^2 + 1 = 0$ ، حيث $s \in \mathbb{R}$ تساوي :

أ $\{\frac{1}{2}\}$ | ب $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ | ج $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ | د \emptyset

٦ إذا كان مربع عدد (لا يساوي صفرًا) مضافًا إليه نصفه يساوي نفس العدد

فإن العدد هو :

أ 1 | ب $\frac{1}{2}$ | ج $\frac{1}{4}$ | د $\frac{1}{2}$

حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد Solving First Degree Inequalities with One Variable

٦-١٠



سوف تتعلم: كيفية حل متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

نشاط :



مصعد إحدى البنايات حمولته القصوى ٥٠٠ كيلوجرام ، فإذا كان متوسط وزن الشخص الواحد ٨٠ كيلوجرامًا من سكان البناية ، فما هو أكبر عدد من الأشخاص الذين يسمح لهم بركوب المصعد في الوقت نفسه ؟

نفرض أن عدد الأشخاص هو x

وزن الشخص الواحد هو ٨٠ كجم

الوزن الكلي للأشخاص هو ٨٠ x

أقصى حمولة للمصعد هي ٥٠٠ كجم

يجب أن يكون الوزن الكلي للأشخاص أصغر من أقصى حمولة للمصعد

نعتبر عن ذلك بالمتباينة : $80x < 500$

المتباينة: هي جملة رياضية (تعبير رياضي) تربط بين أعداد أو مقادير بإحدى العلاقات (الرموز) : $> , < , \geq , \leq$

نعلم أن : $2 < 3$ ونفس المعنى $3 > 2$

كذلك $4 + 2 < 4 + 3$ ، $1 - 3 < 1 - 2$

ولكن $5 \times 2 < 5 \times 3$

خواص المتباينات: إذا كانت a ، b ، c أعدادًا نسبية وكانت $a < b$ فإن :

١ $a + c < b + c$

٢ $a - c < b - c$

٣ $a \times c < b \times c$ ، $a < b$ ، $c > 0$ (ج عدد موجب) .

٤ $a \times c > b \times c$ ، $a < b$ ، $c < 0$ (ج عدد سالب) .

العبارات والمفردات :

متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد

First Degree Inequality with One Variable

حل متباينة

Solving Inequality

تذكر أن :

العبارات التي تدل على المتباينات

• أقل من ، أصغر من $(>)$

• أكبر من أكثر من $(<)$

• أقل من أو يساوي (\geq)

• على الأكثر ، لا يزيد على (\leq)

• أكبر من أو يساوي (\leq)

• على الأقل ، لا يقل عن (\geq)

معلومات مفيدة :

يستخدم النجارون المتباينات لإيجاد العدد الأكبر من الخزائن التي يريدون صنعها إذا كان لديهم كمية محددة من الخشب .



مثال :

حل المتباينات التالية :

أ $3m > 9$ ، $m \in \mathbb{P}$

الحل :

$$\frac{9}{3} > \frac{3m}{3}$$

$$3 > m$$

$$m \in \{0, 1, 2\}$$

∴ مجموعة الحل =

$$\{0, 1, 2\}$$

ب $3m > 9$ ، $m \in \mathbb{V}$

الحل :

$$\frac{9}{3} > \frac{3m}{3}$$

$$3 > m$$

$$m \in \{... , -1, -0, 1, 2\}$$

∴ مجموعة الحل =

$$\{... , -1, -0, 1, 2\}$$

ج $3m \geq 9$ ، $m \in \mathbb{V}$

الحل :

$$\frac{9}{3} \geq \frac{3m}{3}$$

$$3 \geq m$$

$$m \in \{... , 0, 1, 2, 3\}$$

∴ مجموعة الحل =

$$\{... , 0, 1, 2, 3\}$$

تذكّر أنّ :

- النظر الجمعي للعدد
أ هو $(-)$

بحيث $0 = (-) + (-)$

- النظر الضري للعدد

أ هو $\frac{1}{-}$ بحيث

$$1 = \frac{1}{-} \times (-)$$

فكر وناقش

من المثال السابق قالت نورة : أنني لا أستطيع أن أكتب مجموعة الحل بذكر العنصر إذا كانت $m \in \mathbb{P}$. فهل ما تقوله نورة صحيح ؟ فسر إجابتك .

تدرّب (١)

اكتب أول خطوة تجريها في حل كل متباينة من المتباينات التالية :

ج $4 - 3 < \frac{2}{5}$

$$4 - 3 - 3 < \frac{2}{5} - 3$$

ب $2m > 9$

$$\frac{2m}{2} > \frac{9}{2}$$

أ $5 + 3 \geq 5$

$$5 + 3 - 3 \geq 5 - 3$$

تدرّب (٢)

حل المتباينة : $5 + m < 0$ ، $m \in \mathbb{P}$.

إضافة النظر الجمعي

$$5 + m - 5 < 0 - 5$$

$$m < -5$$

∴ حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من -5

تذكّر أنّ :

خطوات حل المتباينة

من الدرجة الأولى في

متغير واحد تطابق

خطوات حل المعادلة

من الدرجة الأولى في

متغير واحد.

تدرب (٣) :

حل المتباينات التالية حيث $s \in \mathbb{R}$:

أ $2s + 3 \leq 1$

$2s + 3 - 3 \leq 1 - 3$

العملية العكسية :

$2s \leq -2$

$\frac{2s}{2} \leq \frac{-2}{2}$

العملية العكسية :

$s \leq -1$

تم التمييز من
الاعداد النسبية الأكبر من أو تساوي
النسبة الأصغر من

ب $\frac{2}{3}s - \frac{1}{2} > \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}s - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}s > \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}s > \frac{4}{6} + \frac{3}{6}$

$\frac{2}{3}s \times \frac{3}{2} > \frac{7}{2} \times \frac{3}{2}$

$s > \frac{21}{4}$

الاعداد النسبية الأكبر من أو تساوي
النسبة الأصغر من

فكر وناقش

يقول أحمد: أنني أستطيع حل تدريب (٣) (ب) بطريقة أخرى وهي ضرب طرفي المتباينة في المضاعف المشترك الأدنى (م.م.أ) للمقامات، هل توافقه الرأي؟ فسر إجابتك.

تدرب (٤) :

حل المتباينات التالية حيث $s \in \mathbb{R}$:

أ $\frac{s}{3} < \frac{5}{3}$

$\frac{s}{3} \times 3 < \frac{5}{3} \times 3$

$s < 5$

الاعداد النسبية الأكبر من أو تساوي
النسبة الأصغر من

ب $2s + 2,5 \geq 0$

$2s + 2,5 - 2,5 \geq 0 - 2,5$

$2s \geq -2,5$

$2s \geq -2,5$

$s \geq -1,25$

الاعداد النسبية الأكبر من أو تساوي
النسبة الأصغر من

تدرّب (٥)

عند الضرب في عدد
سالبة تغير رمز التباين

أ حل المتباينة $3 - 4 > 8 - 3$ حيث $3 \in \mathbb{R}$:

$$3 - 4 > 8 - 3$$

$$3 - 4 > 8 - 3$$

$$3 - 4 > 8 - 3$$

س < 3 ← حل المتباينة مجموعة الأعداد المنسبة الأكبر من 3

ب حل المتباينة $5 - 3 \leq 2 + 4$ حيث $3 \in \mathbb{R}$:

$$5 - 3 \leq 2 + 4$$

$$5 - 3 \leq 2 + 4$$

$$5 - 3 \leq 2 + 4$$

$$5 - 3 \leq 2 + 4$$

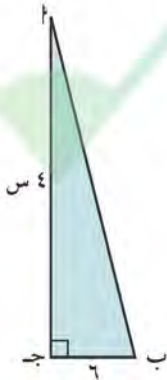
$$5 - 3 \leq 2 + 4$$

$$5 - 3 \leq 2 + 4$$

س $\leq \frac{1}{3}$ ← حل المتباينة مجموعة الأعداد المنسبة الأكبر من أو تساوي $\frac{1}{3}$

تدرّب (٦)

في الشكل المقابل أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ج ، من البيانات المدونة عليه أوجد مجموعة قيم س التي تجعل مساحة المثلث أصغر من ٤٨ وحدة مربعة .



مساحة المثلث $48 >$

$$48 > \frac{1}{2} \times 6 \times س$$

$$48 > 3 \times س$$

$$48 \times \frac{1}{3} > س \times 3$$

$$س > 16$$

∴ مجموعة قيم س التي تجعل مساحة المثلث أصغر من ٤٨ وحدة مربعة هي :

١ ، ٢ ، ٣ ، الأكبر من صفر والأصغر من ١٦

تدرّب (٧) :

س = ٧ يمثل أحد الحلول المتباينة :

Ⓐ س - ٥ > ١ Ⓑ - ٩ ≤ س Ⓒ ٥ ≤ س Ⓓ ٣ < س < ٢٧

تمرّن :

١ حل كلاً من المتباينات التالية في ٥ :

Ⓐ ١٩ ≥ ٤ + ٢ص

٢ص + ٤ - ٤ ≥ ٤ - ١٩

٢ص ≥ ١٥

ص ≥ ٧.٥

ص ≥ ٨

حل المتباينة مجموعة الأعداد لشيبة الأصغر من أو تساوي ٨

Ⓑ - ١ < ٢ - ١/٣

ب - ١/٣ < ١/٣ + ١

ب < ٤/٣

ب < ١.٣٣

حل المتباينة الأعداد لشيبة الأكبر من ١.٣٣

Ⓑ ١٥ < ٣ + ٢ص

٢ص + ٣ - ٣ < ١٥ - ٣

٢ص < ١٢

ص < ٦

ص < ٦

حل المتباينة الأعداد لشيبة الأكبر من ٦

Ⓓ ١ ≤ ٣, ٤ - ٣٥

٣٥ - ٣٥ ≤ ٣٤ + ١ - ٣٤

٠ ≤ ١

٠ ≤ ١

حل المتباينة الأعداد لشيبة الأكبر من أو تساوي ١

Ⓔ ١ < ٣ - ٥

٥ - ٥ < ٣ - ١

٠ < ٢

٠ < ٢

حل المتباينة الأعداد لشيبة الأصغر من ٢

Ⓕ ٣ - ٥ ≥ ٤ - ٥

٥ + ٥ - ٥ ≥ ٤ - ٥

٥ ≥ ٤

٥ ≥ ٤

حل المتباينة الأعداد لشيبة الأكبر من أو تساوي ٤

ح) $2س + 4 \geq 3(س + 1)$

ز) $10(س - 5) < 7(س - 6)$

$س + 4 \geq 3س + 3$

$س - 50 < 7س - 42$

$س - 3 \geq 3س - 4$

$س + 7 - 50 < 7س - 42 + 7س$

$س \geq 1$

$س \leq 5$

$س \leq 1$

$س \leq 9$

حل المتباينة بالاعداد الطبيعية الاكبر من او تساوي 1

حل المتباينة بالاعداد الطبيعية الاكبر من $\frac{9}{17}$

٢) أوجد طول ضلع مربع الذي يجعل محيط المربع أكبر من محيط مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٨ وحدة طول .

طول المربع = س محيط المربع = ٤س
محيط المثلث متطابق الأضلاع = ٨ × ٣ = ٢٤ وحدة طول

حل المتباينة بالاعداد الطبيعية الاكبر من ٦

$\frac{4}{3}س < 24 \Rightarrow س < 6$

٣) إذا كانت: $٥ \geq س \geq ٢$ ، $٥ \geq ص \geq ٦$ ،

فما هي أصغر قيمة للمقدار: $س - ٢ص$ ؟

د) ١١,٥

ج) ١٠,٥

ب) ٦ -

ا) ١٠,٥ -

٤) إذا كانت: $٤ \geq س \geq ١$ ، $٦ - \geq ص \geq ٤$ ،

فما أعلى قيمة للمقدار: $س - ٢ص$ ؟

د) ٣٦

ج) ٣٠

ب) ٢٤

ا) ١٦

٥) س هو عدد إذا جمعنا له العدد ٦ و ضربنا الناتج في ٧ نحصل على عدد أكبر من

٤١ . أي من المتباينات التالية تصف هذه المعطيات ؟

أ) $٧س + ٦ < ٤١$ ب) $٧س < ٣٥$ ج) $٧س \times ٦ > ٤١$ د) $٧(س + ٦) < ٤١$

مراجعة الوحدة العاشرة
Revision Unit Ten

٧-١٠

١ أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) لما يلي :

ب ٦س^٢ ص ، ٥س ص

٦س^٢ ص = ٢ . ٣ . ٥

أ ٧س^٢ ص ، ١٤س ص^٢

١٤س ص = ٢ . ٧ . س

٢ حلل المقادير التالية بإيجاد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

ب ٣س - ٢س^٢ ص + ١٥س^٣ ص^٥

٣س (٣ - ٢س ص + ١٥س^٢ ص^٥)

أ ١٥س^٢ + ٩س

٣س (٥س + ٣)

٣ حلل ما يلي تحليلًا تامًا :

أ ٩س^٢ - ٩

(٣ - س)(٣ + س)

ب (س - ١)^٢ - ٤

(س - ١ - ٢)(س - ١ + ٢)

٤ حل المعادلات التالية حيث س ، ص ∈ ℝ :

ب ٠ = (٣ + س)(١ - س)

س - ١ = ٠ | س + ٣ = ٠
س = ١ | س = -٣
٢ . ٣ = {١، -٣}

أ ٣ + ١٥ = ٢ + ٣ - $\frac{ص}{٢}$ ١٥ = ٣ - $\frac{ص}{٢}$

$١٨ = \frac{ص}{٢}$
٣٦ = ص

د ٠ = (س - ص) - ٤

(س - ٣ - س)(س - ٣ + س)
٠ = (٥ - س)(١ - س)
٥ - س = ٠ | ١ - س = ٠
س = ٥ | س = ١
٢ . ٣ = {١، ٥}

ج ٨١ = س^٢

س = ٨١
٨١ - س = ٠
٨١ - (٩ + س) = ٠
٨١ - ٩ - س = ٠ | ٨١ - ٩ = س
٧٢ = س

٥ حل المتباينات التالية حيث $s \in \mathbb{R}$:

أ $2s - 3 < 17$ $1 - 5s > 6$
ب $3 + 17 < 3 + 17$ $1 - 1 > 6 - 6$
ج $2s < 20$ $5s > 5$
د $2s < 10$ $s < 1$

صحيحة الأعداد النسبية الأكبر من ١. صحيحة الأعداد العشرية الأكبر من ١.

٦ إذا كان لشركة تأجير السيارات تعريفة أساسية قدرها ٢٥ دينار و ٢, ٠ دينار عن كل كيلومتر تقطعها سيارة الأجرة .

فأي مما يلي يمثل التكلفة بالدينار لكي تستقل سيارة الأجرة لرحلة بمسافة s كيلومتر؟

أ $25 + 0,2s$ ب $0,2 \times 25$
ج $(25 + 0,2) \times s$ د $0,2 \times 25 + s$

٧ المتباينة $2s < 6$ تكافئ:

أ $s < 12$ ب $s < \frac{1}{3}$
ج $s > 3$ د $s < 3$

٨ إذا كان $s + ص = 35$ ، وكان كل من s ، $ص$ عددًا صحيحًا موجبًا يقبل القسمة على العدد ٥ ، وكان $s < ٥$ ، وكان $ص$ فإن إحدى قيم s الممكنة هي:

أ ٢٠ ب ٢٥ ج ٣٠ د ٣٥

اختبار الوحدة العاشرة

أولاً: في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١	<input type="checkbox"/>	العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) بين ٦س ^٢ ص ^٢ ، ٢س ^٣ ص ^٣ هو ٦س ^٣ ص ^٢
٢	<input type="checkbox"/>	٢س + ٤س ^٢ = ٢س(٢ + ١س)
٣	<input type="checkbox"/>	مجموعة حل المعادلة س ^٢ - ٢٥ = ٠ ، حيث س ∈ ط ، هي {٥ ، -٥}
٤	<input type="checkbox"/>	حل المتباينة -٥ < س < ٢٠ هو س < -٤

ثانياً: لكل بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ المقدار $\frac{٨س٠ص٢}{٢س٠ص٧}$ في أبسط صورة هو :

١ (أ) ٦س^٠ص^٠ (ب) $\frac{٤}{ص٠}$ (ج) ٤ص^٠ (د) ٦ص^٠

٦ العدد الذي يمثل حلًا للمعادلة (س - ٣)^٢ = ٠ (حيث س ∈ ط) هو :

١ (أ) صفر (ب) -٣ (ج) ٣ (د) ٦

٧ اشترى هشام كتابًا و ٥ دفاتر بثمن ١٣٥ زد ، إذا علم أنّ ثمن الكتاب يبلغ ٤ أضعاف ثمن الدفتر الواحد ، فما ثمن الكتاب ؟

١ (أ) ١٥ زد (ب) ٨٠ زد (ج) ٦٠ زد (د) ٤٥ زد

٨ حل المتباينة $2 > 10$ (حيث $s \in \mathbb{R}$) هو :

- كل الأعداد النسبية الأصغر من ٥ كل الأعداد النسبية الأكبر وتساوي ٥
 كل الأعداد النسبية الأصغر وتساوي ٥ كل الأعداد النسبية الأكبر من ٥

٩ مجموعة حل المعادلة : $s^2 = -4$ (حيث $s \in \mathbb{R}$) هو :

- ٢ أو ٢- ٤ أو ٤- مجموعة خالية كل الأعداد النسبية الأكبر من ٤

١٠ تحليل المقدار $4 + 4k$ هو :

- $4(1+k)$ $4k$ $4(1+k)$ $4k$



تم التحميل من

موقع مدرستي

www.school-kw.com

الهندسة والقياس Geometry and Measurement

الوحدة الحادية عشرة

الزراعة

Agriculture



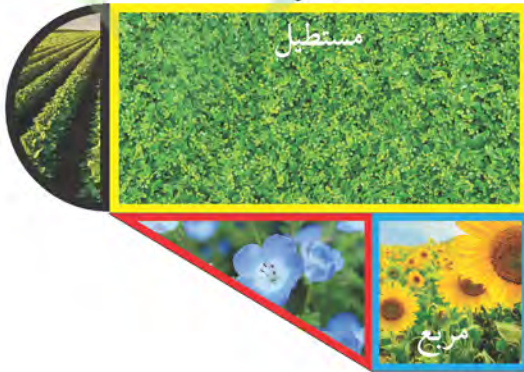
مشروع الوحدة :
(مساحات زراعية)



الزراعة هي النواة الرئيسية التي ما زال الإنسان يُطورها بالعلم والمعرفة ويرعاها بالجد والعمل والسعي إلى اكتشاف آفاق جديدة وتطوير وتحسين جميع جوانبها ومجالاتها سعيًا إلى المزيد من الإنتاج والمزيد من الفوائد لأنّ الزراعة تُعد أحد المصادر الأساسية للدخل وأسلوب حياة إنساني ووسيلة للتحكم والسيطرة على الأسواق العالمية .

خطة العمل :

تُشجع دولة الكويت المواطنين على ممارسة الأنشطة الزراعية ، ففي الصورة أمامك جزء من منطقة زراعية زرعت عدة أنواع وكل نوع محاط بشكل هندسي . كل مجموعة تقوم بتوظيف مفاهيم المساحات غير المنتظمة في إيجاد المساحة الكلية لهذه الأرض الزراعية .
٤٠٠ متر



١٥٠ مترًا

خطوات تنفيذ المشروع :

- ارسم مزرعتك الخاصة كما في الشكل المقابل ، استخدم ٣ إلى ٥ أشكال هندسية وأعطها قياسات مناسبة .
- أوجد مساحة الأشكال الهندسية المرسومة .
- أوجد المساحة الكلية للمنطقة الزراعية كلها .

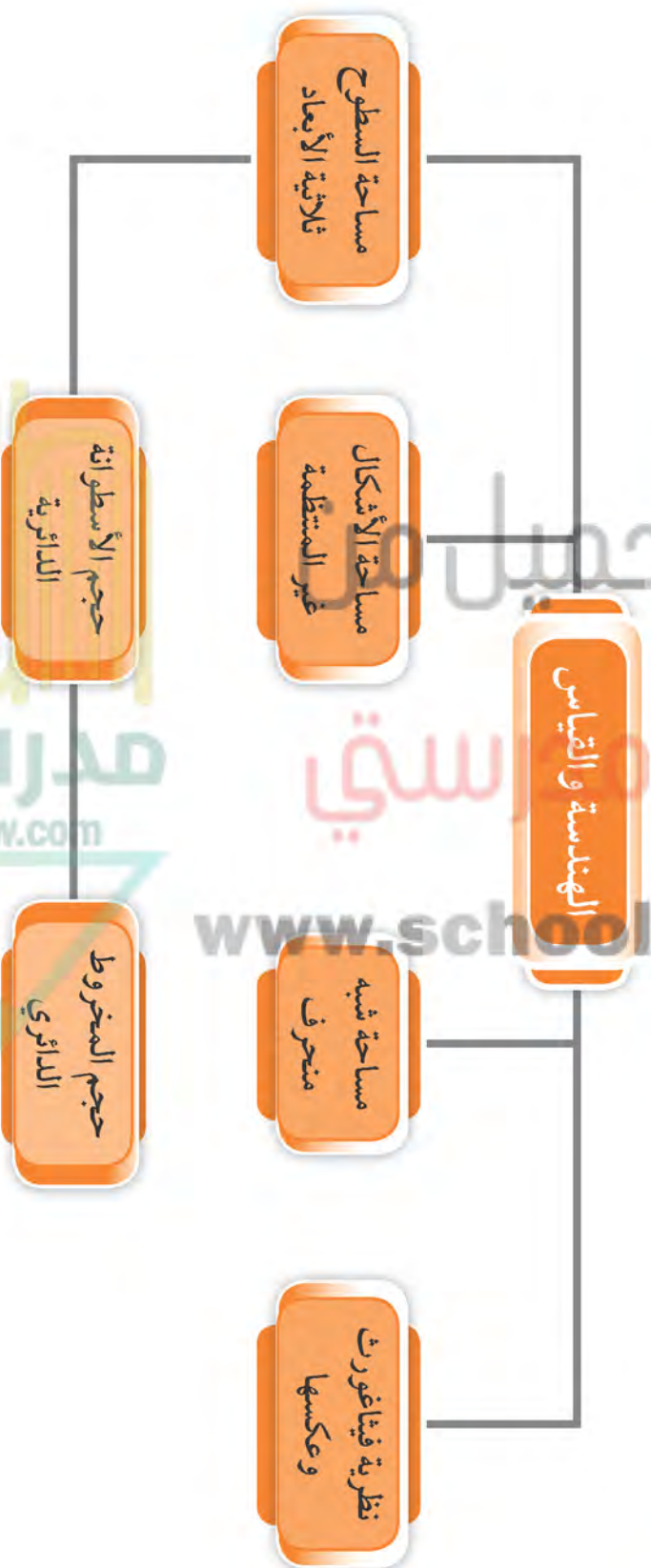
علاقات وتواصل :

- تبادل الرسومات والحسابات التي أوجدتها كل مجموعة .
- تتحقق كل مجموعة من صحة حل المجموعة الثانية .

عرض العمل :

- تُقدم كل مجموعة المُخطط (الرسم) الهندسي والمساحة الكلية للمشروع .
- وتعرض الإجابات للتحقق من الحل .

مخطط تنظيمي للوحدة الحادية عشرة

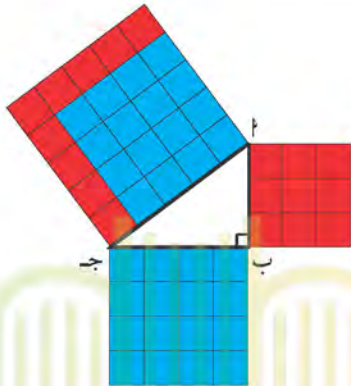


نظرية فيثاغورث وعكسها Pythagorean Theorem and its Reciprocal

١١-١



سوف تتعلم : نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها .



نشاط (١) :



في الشكل المقابل : Δ $أ ب ج$ قائم الزاوية في $ب$
بحيث $أ ب = ٣$ وحدة طول ، $ب ج = ٤$ وحدة
طول ، من الرسم وباستخدام الوحدات المربعة ،
أكمل الجدول التالي :

المثلث	أطوال الأضلاع	مربعاتها	ماذا تلاحظ؟
أ ب ج قائم الزاوية في ب	ضلع القائمة : $أ ب = ٣$ وحدان طول	$(أ ب)^2 = ٩$	ماذا تلاحظ؟ $١٦ + ٩ = ٢٥$
	ضلع القائمة : $ب ج = ٤$ وحدان طول	$(ب ج)^2 = ١٦$	
	الوتر : $أ ج = ٥$ وحدان طول	$(أ ج)^2 = ٢٥$	

الاستنتاج :

Δ $أ ب ج$ قائم الزاوية في $ب \iff (أ ب)^2 + (ب ج)^2 = (أ ج)^2$

نظرية فيثاغورث : في المثلث القائم الزاوية يكون مربع طول الوتر مساوياً لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .



Δ $أ ب ج$ قائم الزاوية في $أ \iff$

$$(ب ج)^2 + (أ ب)^2 = (أ ج)^2$$

العبارات والمفردات :

نظرية فيثاغورث

Pythagorean
Theorem

عكس نظرية

فيثاغورث

Reciprocal of
Pythagorean
Theorem

معلومات مفيدة :

يستخدم عاملو البناء
نظرية فيثاغورث
لتشييد جدران
مستوية .



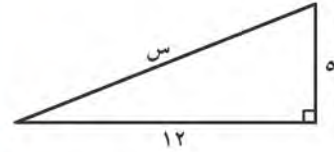
تذكر أن :

في المثلثات قائمة
الزاوية ضلعا القائمة
هما الضلعان اللذان
يشكلان الزاوية
القائمة ، والوتر هو
أطول ضلع في المثلث
وهو الضلع المقابل
للزاوية القائمة .

تدرّب (١) 

أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي :

أ



$$س^2 = ١٢^2 + ٥^2$$

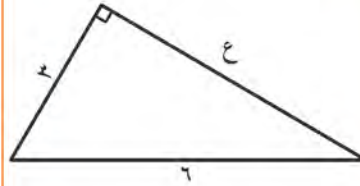
$$س^2 = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$س = \sqrt{١٦٩}$$

$$س = ١٣$$

ب



$$٦^2 = ٣^2 + ع^2$$

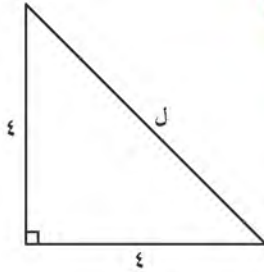
$$٣٦ = ٩ + ع^2$$

العملية العكسية

$$ع^2 = ٣٦ - ٩ = ٢٧$$

$$ع = \sqrt{٢٧}$$

ج



$$ل^2 = ٤^2 + ٤^2$$

$$ل^2 = ١٦ + ١٦$$

$$ل = \sqrt{٣٢}$$

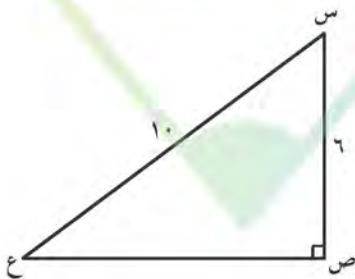
تدرّب (٢) 

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه :

س ص = ٦ وحدة طول ، س ع = ١٠ وحدة طول .

أوجد ص ع .

المعطيات : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص
س ص = ٦
س ع = ١٠



المطلوب : إيجاد ص ع

البرهان : Δ س ص ع قائم الزاوية في ص

$$\therefore (س ص)^2 + (ص ع)^2 = (س ع)^2$$

$$٦^2 + (ص ع)^2 = ١٠^2$$

$$(ص ع)^2 = ١٠^2 - ٦^2$$

$$\therefore ص ع = \sqrt{١٠^2 - ٦^2} = ٨ \text{ وحدات طول}$$

(باستخدام العملية العكسية)



تدرّب (٣) :

إذا كانت المدينة (ب) تقع شرق المدينة (پ) بمسافة ١٥ كم وكانت المدينة (ج) تقع في شمال المدينة (پ) بحيث تبعد عن المدينة (ب) مسافة ٢٥ كم . أوجد المسافة بين المدينتين (پ) ، (ج) .

المعطيات : $BP = 15$ كم ، $BJ = 25$ كم

المطلوب : إيجاد JP

البرهان : Δ ب ج پ قائم الزاوية في پ

$$\therefore (BP)^2 + (BJ)^2 = (JP)^2$$

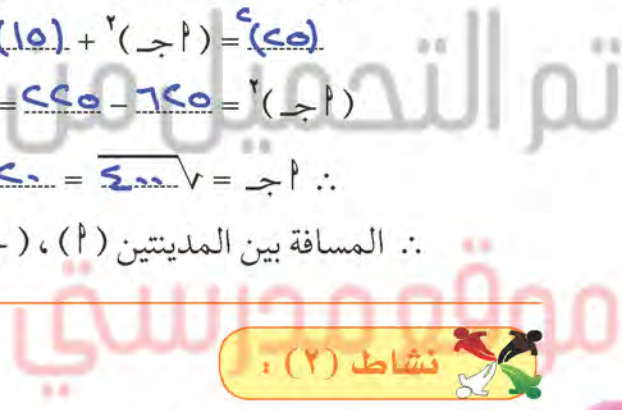
$$15^2 + 25^2 = (JP)^2$$

$$\text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين} \quad 200 = 400 - 160 = (JP)^2$$

$$\therefore JP = \sqrt{200} = 14.14$$

\therefore المسافة بين المدينتين (پ) ، (ج) هي ١٤.١٤ كم

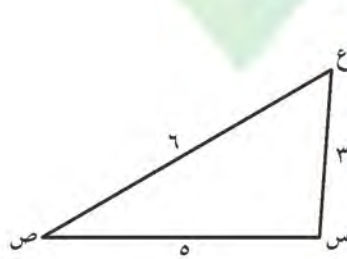
معلومات مفيدة :



نشاط (٢) :

في ما يلي عدة مثلثات معلوم أطوال أضلاعها . قارن بين أكبر الأضلاع طولاً ، ومجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين . في كل من المثلثات التالية باستخدام المنقلة حاول التعرف على قياس الزاوية المقابلة لأكبر الأضلاع طولاً (بالقياس) .

اللوازم :
منقلة



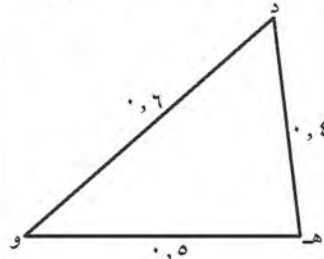
$$36 = 2^2 (صع)$$

$$2^2 (صس) + 2^2 (عس)$$

$$= 25 + 9 = 34$$

ماذا تلاحظ؟ $36 > 34$ ماذا تلاحظ؟ $36 < 34$ ؟

$$\hat{ص} \neq 90^\circ$$

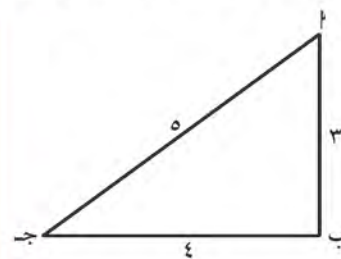


$$36 = 2^2 (دو)$$

$$2^2 (دهـ) + 2^2 (دو)$$

$$= 16 + 25 = 41$$

$$\hat{هـ} \neq 90^\circ$$



$$25 = 2^2 (ج هـ)$$

$$2^2 (ب هـ) + 2^2 (ج ب)$$

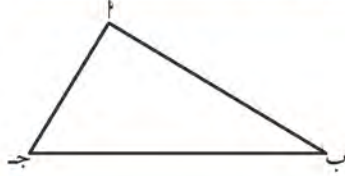
$$= 16 + 9 = 25$$

ماذا تلاحظ؟ $25 = 25$ ؟

$$\hat{ب} = 90^\circ$$

مما سبق نصل إلى ما نسميه عكس نظرية فيثاغورث :

عكس نظرية فيثاغورث : إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث مساوياً لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين ، فإنَّ هذا المثلث قائم الزاوية .



إذا كان $(ب ج)^2 = (ب ج)^2 + (ج ب)^2$ ، فإنَّ :
 Δ ب ج قائم الزاوية في ب .

ملاحظة :

$$(ب ج)^2 = (ب ج)^2 + (ج ب)^2 \iff \Delta ب ج قائم الزاوية في ب .$$

تدرّب (٤) :

في الحالات التالية : ابحث في ما إذا كانت الأطوال المعطاة يمكن أن تمثل أطوالاً لمثلث قائم الزاوية .

أ ٥ وحدة طول ، ١٢ وحدة طول ، ١٣ وحدة طول

طول ، ١٣ وحدة طول ، ١٧ وحدة طول

ب ٥ وحدة طول ، ٥ وحدة طول ، ٧ وحدة طول

$$169 = 13^2$$

$$49 = 7^2$$

$$81 = 9^2$$

$$25 = 5^2$$

$$76 = 49 + 25 = 7^2 + 5^2$$

$$50 = 25 + 25 = 5^2 + 5^2$$

$$176 = 144 + 32 = 12^2 + 4^2$$

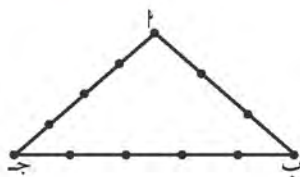
$$169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$$

$$169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$$

$$169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$$

ماذا تلاحظ ؟ **تمثل قائم** ؟ ماذا تلاحظ ؟ **لا تمثل قائم** ؟ ماذا تلاحظ ؟ **لا تمثل قائم** ؟

تدرّب (٥) :



استخدم المصريون القدامى أحياناً ذات عقد تكون مثلثاً تبلغ أطوال أضلاعه بوحدات الطول ٣ ، ٤ ، ٥ على التوالي لمساعدتهم على تشكيل الزوايا القائمة أثناء بناء الأهرامات . وضح كيف يعمل هذا النظام .

$$25 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$$

$$25 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$$

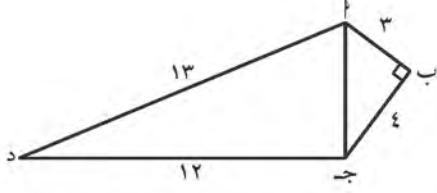
نلاحظ أن : $(ب ج)^2 = (ب ج)^2 + (ج ب)^2$

$$\therefore (ب ج)^2 = (ب ج)^2 + (ج ب)^2$$

\therefore النظام يكون زاوية **قائم الزاوية** .



مثال :



في الشكل المقابل : $\angle ب = 90^\circ$ ،
 $ب ج = 3$ وحدة طول ، $ب ج = 4$ وحدة طول ،
 $ج د = 12$ وحدة طول ، $ب د = 13$ وحدة طول .
 احسب طول $ا ج$ ، ثم أثبت أن $\Delta ا ج د$ قائم الزاوية .

الحل :

المعطيات : (1) $\angle ب = 90^\circ$ ، $ب ج = 3$ وحدة طول ، $ب ج = 4$ وحدة طول ،
 $ج د = 12$ وحدة طول ، $ب د = 13$ وحدة طول .

المطلوب : (1) إيجاد طول $ا ج$.

(2) إثبات أن $\Delta ا ج د$ قائم الزاوية .

البرهان : $\Delta ا ب ج$ قائم الزاوية في $\angle ب$

$$\therefore (ب ج)^2 + (ا ب)^2 = (ا ج)^2$$

$$(ب ج)^2 = 9 = 16 + 25 = (ا ج)^2 \quad (\text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين})$$

$$\therefore ا ج = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{في } \Delta ا ج د : (ا ج)^2 = (ب د)^2 - (ج د)^2 = 169 - 144 = 25$$

$$(ا ج)^2 = 25 = 169 - 144 = (ج د)^2 + (ا ج)^2 - (ج د)^2$$

$$25 = 169 - 144 = 25$$

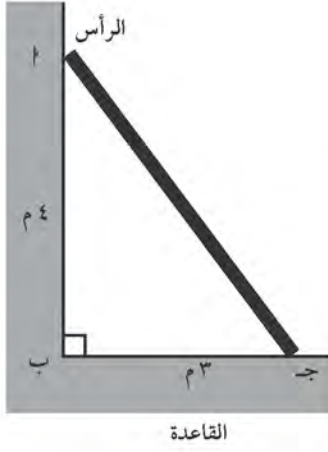
$$\therefore (ا ج)^2 + (ج د)^2 = (ب د)^2$$

$$\therefore (ا ج)^2 + (ج د)^2 = (ب د)^2$$

\therefore مربع طول الضلع الأكبر يساوي مجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين .

\therefore المثلث $ا ج د$ قائم الزاوية في $ج$.

تدرّب (٦)



سلم يرتكز على حائط رأسي بحيث تبعد قمته عن سطح الأرض بمقدار ٤ أمتار ، وتبعد قاعدة السلم عن الحائط ٣ أمتار . أوجد طول السلم .

المعطيات : $٢ = ب$ ، $٣ = ج$ ، $٤ = هـ$

المطلوب : طول السلم

البرهان : Δ ب ج قائم الزاوية في ب

$$\therefore (ج)^2 + (ب)^2 = (هـ)^2$$

$$(ج)^2 = (هـ)^2 - (ب)^2 \quad (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)$$

$$ج = \sqrt{٤^2 - ٢^2} = ٣$$

\therefore طول السلم = ٥ أمتار

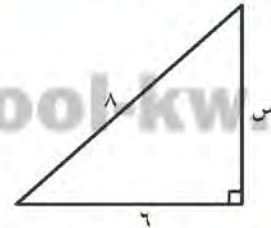
تمرّن :

أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي :



$$ص^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$ص = \sqrt{2}$$



$$س^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$س = \sqrt{100} = 10$$

ب) في كل مما يلي ، حدّد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا :

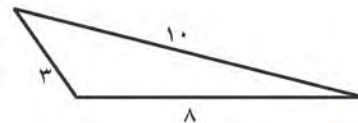


$$179 = 13^2$$

$$179 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$$

$$179 = 179$$

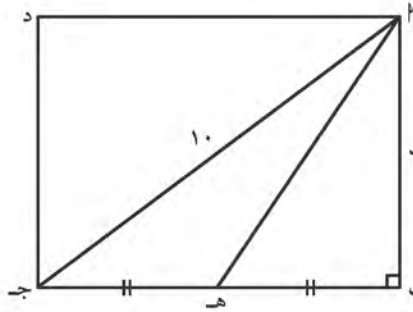
تمثل مثلث قائم



$$100 = 10^2$$

$$73 = 9 + 64 = 3^2 + 8^2$$

$100 > 73$ لا تمثل مثلث قائم



٢) ا ب ج د مستطيل فيه :

ا ج = 10 وحدة طول ، ا ب = 6 وحدة طول ،

هـ منتصف ب ج . أوجد بالبرهان طول كل

من : ب ج ، ب هـ ، ا هـ .

المطلوب : ا ب ج د مستطيل ، ا ب = 6 ، ا ج = 10 ،

المطلوب : ايجاد ب ج ، ب هـ ، ا هـ

البرهان : ا ب ج د مستطيل ، هـ (ب) = 9°

ا ب ج د قائم في ب \Rightarrow ب ج هـ = ب ج ا = ب ج د = 10 - 6 = 4 \Rightarrow ب ج = 4 ، ب هـ = 6 ، ا هـ = 8

هـ منتصف ب ج \Rightarrow ب هـ = ج هـ = 2 \Rightarrow ا هـ = 8

ا هـ = 8 \Rightarrow ا ب هـ = 16 + 36 = 52 \Rightarrow ا هـ = 8



٣) ساعة حائط طول مؤشر الساعات فيها 6 وحدة طول ، بينما

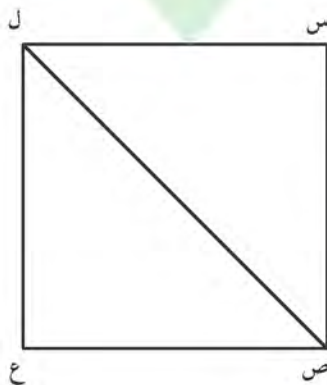
طول مؤشر الدقائق 8 وحدة طول . أوجد المسافة بين

طرفي المؤشرين عند تمام الساعة الثالثة .

عند الساعة الثالثة تكون العقارب قائمة
المسافة بين طرفي العقارب تمثل الوتر

المسافة = 8 + 6 = 14 = 10

المسافة = 10 = 14 وحدة طول



٤) تبلغ مساحة فناء مربع الشكل 81 وحدة مربعة

ويتضمن ممرًا قطريًا .

أ) أوجد طول ضلع الفناء . $\sqrt{81}$

ب) أوجد طول الممر القطري . $9 =$ وحدات طول

ل ص = ل ع + ص ع

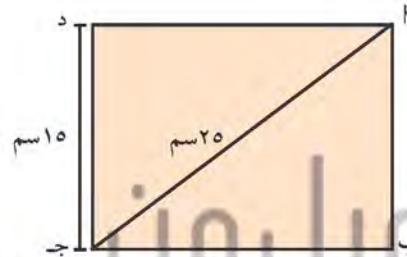
169 = 81 + 81 = 9 + 9

ل ص = 13 وحدة طول

٥ تحدد كل مجموعة من الأعداد التالية أطوال أضلاع مثلث .
حدد المجموعة التي لا تناسب المجموعات الأخرى ؟

- أ) ٥، ٤، ٣ ب) ٧، ٥، ٣ ج) ٣٧، ٣٥، ١٢ د) ١٠، ٨، ٦

٦ يصنف مغلف البريد الذي على شكل مستطيل بأنه كبير إذا تجاوز طوله ٣٠ سم .
هل المغلف التالي كبير ؟ وضح إجابتك

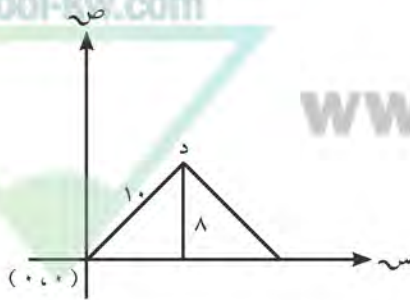


$$^c(10) + ^c(50) = ^c(60) - ^c(50) = ^c(10)$$

$$٤ = ٥٥ - ٦٥ =$$

$$٤ = ٥٧ - ٥٣ =$$

٧ إحداثي النقطة د هو:



- أ) (٦، ٨) ب) (١٠، ٨) ج) (٨، ٦) د) (٨، ١٠)

مساحة شبه المنحرف Area of Trapezoid

٢-١١

سوف تتعلم : إيجاد مساحة شبه المنحرف .

نشاط :



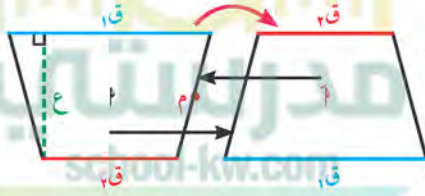
أراد مزارع أن يضع مُلصقًا دعائيًا على سلة من سعف النخيل أوجهها على شكل شبه منحرف ، فاستعان بابنه أحمد ليُساعدَه في ذلك وطلب منه الآتي :

خذ زوجًا مُتطابقًا من شبه المنحرف ودور أحدهما ١٨٠° حول م ، وألصق البطاقتين ببعضهما بعضًا كما هو موضح في الشكل .

اللوازم :

- زوج متطابق من شبه المنحرف على ورق مقوى .
- شريط لاصق
- قلم - ورقة

سوف نتعلم من نشاط المزارع وابنه أحمد كيفية حساب مساحة شبه المنحرف .



١ ما اسم الشكل الناتج ؟ متوازي أضلاع

٢ ما العلاقة بين مساحة شبه المنحرف ومساحة

الشكل الناتج ؟ $180 = \frac{1}{2} \times 360$

٣ ما العلاقة بين ارتفاع وطول قاعدة الشكل الناتج ، وارتفاع وطول قاعدة شبه

المنحرف ؟ الارتفاع نصفه ، طول قاعدة متوازي الأضلاع يساوي مجموع

طول القاعدة الصغرى والكبرى معا "شبه المنحرف"

فكر في استنتاج قاعدة لحساب مساحة شبه المنحرف باستخدام الارتفاع وطول القاعدة .

معلومات مفيدة :

سعف النخيل عبارة عن أوراق شجرة النخيل المركبة وهي ريشية الشكل ، طولها يتراوح ما بين ٣ - ٦ أمتار تقريبًا وتنتج النخلة ما بين العشرة والعشرين سعفة في السنة .

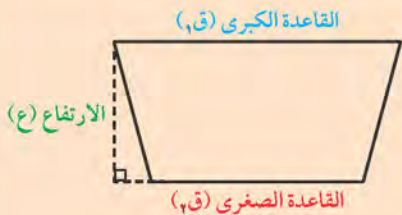


مما سبق نجد أن :

مساحة شبه المنحرف

$$= \frac{\text{مجموع طولي القاعدتين}}{2} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{(ق١ + ق٢)}{2} \times ع$$



تدرّب (١) :

سمّ القاعدتين والارتفاع في كل شكل مما يلي :

هو	س ص	ق١ ب د
ن ل	ل ع	ق٢ د هـ
هـ د	ص ع	ع د هـ

تدرّب (٢) :

أوجد مساحة شبه المنحرف ب ج د .

$$م = \frac{(ق١ + ق٢) \times ع}{٢}$$

$$= \frac{(٦ + ٨) \times ٤}{٢}$$

$$= ٤ \times ٧$$

$$= ٢٨ م$$



تدرّب (٣) :

أوجد مساحة شبه المنحرف الذي فيه :

أ ق١ = ٧ وحدة طول

ق٢ = ٥ وحدة طول

ع = ٦ وحدة طول

$$م = \frac{(ق١ + ق٢) \times ع}{٢}$$

$$\therefore م = \frac{٦ \times ١٢}{٢} = ٣٦ \text{ وحدة مربعة}$$

ب ق١ = ٣, ٦ وحدة طول

ق٢ = ٧, ٣ وحدة طول

ع = ٧ وحدة طول

$$م = \frac{(ق١ + ق٢) \times ع}{٢}$$

$$\therefore م = \frac{٧ \times ١٠}{٢} = ٣٥ \text{ وحدة مربعة}$$

تدرّب (٤) :

أوجد ارتفاع شبه منحرف مساحته ١٦ وحدة مربعة وطول القاعدتين فيه ٣ وحدة طول، ٥ وحدة طول .

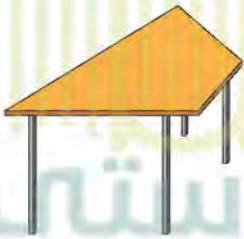
$$ع \times \left(\frac{ق_١ + ق_٢}{٢} \right) = م$$

$$ع \times \left(\frac{٥ + ٣}{٢} \right) = ١٦$$

$$ع \times ٨ = ٢ \times ١٦$$

$$\therefore ع = \frac{٣٢}{٨} = ٤ \text{ وحدات طول}$$

تمرّن :

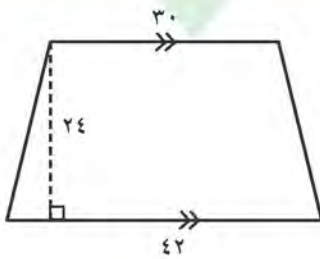


١ طاولة على شكل شبه منحرف طولاً ضلعيها :
المتوازيين ٦، ٢ وحدة طول، ٤، ١ وحدة طول والبعد
العمودي بين الضلعين ٥، ٠ . أوجد مساحة الطاولة .

مساحة الطاولة = مساحة شبه المنحرف

$$١ \text{ وحدة مربعة} = ١,٥ \times \frac{ع}{٢} = \frac{١,٤ \times ٢,٦}{٢} = ع \times \frac{٤,٥ + ١,٥}{٢} =$$

www.school-kw.com



٢ بين الشكل المجاور حديقة منزلية على شكل شبه
منحرف يراد زراعتها بالعشب الطبيعي، إذا كان سعر
الوحدة المربعة من العشب الطبيعي ١٢ ديناراً، فكم
تكلف زراعة الحديقة بالعشب ؟

مساحة الحديقة = مساحة شبه المنحرف

$$٤٢ \times \frac{٧٤}{٢} = ٤٢ \times \frac{٣٠ + ٤٢}{٢} = ع \times \frac{٤,٥ + ١,٥}{٢} =$$

$$١٦٤ = ٤٢ \times ٣٦ =$$

$$١٦٤ = ٤٢ \times ٣٦ = \text{تكلفة زراعة الحديقة} = ١٤ \times ١٦٤ = ١.٣٦٨ \text{ ديناراً}$$

حل المسائل : مساحة الأشكال غير المنتظمة Problem Solving : Area of Irregular Figures

٣-١١



سوف تتعلم : إيجاد مساحة الأشكال غير المنتظمة .



نشاط :



يُمثل الشكل الموضح قطعة أرض في إحدى ملاعب الجولف الخاصة الصغيرة . تريد صاحبة الملعب أن تكسو المنطقة المحددة بعشب جديد .

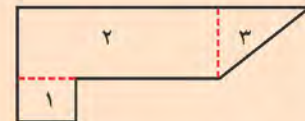
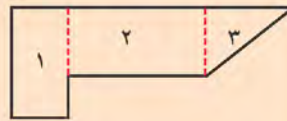
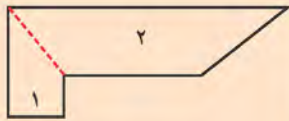
١ أوجد الأطوال المجهولة س ، ص ،
واشرح كيف أوجدت أطوالها .

٢ ارسم قطعاً مستقيمة أفقية أو رأسية أو مائلة لتقسم الشكل إلى أشكال هندسية مألوفة .

٣ أوجد مساحة كل شكل هندسي على حدى ، ثم أوجد مساحة قطعة الأرض الكلية .

٤ قسّم قطعة الأرض إلى أشكال هندسية بطريقة مختلفة ، ثم أوجد المساحة الكلية .
هل حصلت على المساحة نفسها ؟

يمكنك إيجاد مساحة شكل هندسي غير منتظم عن طريق تقسيم الشكل إلى أجزاء هي عبارة عن أشكال هندسية مألوفة لديك ، ثم القيام بجمع مساحات هذه الأجزاء .
توجد عادةً طرق مختلفة لتقسيم الشكل غير المنتظم .



معلومات مفيدة :

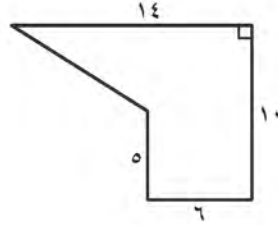
يستخدم مهندسو التخطيط العمراني الأشكال الهندسية غير المنتظمة عند التخطيط لبناء منازل جديدة .



مثال (١) :

أوجد مساحة الشكل المقابل .

الحل :



يمكن تقسيم الشكل إلى مستطيل ومثلث .

لإيجاد مساحة المستطيل :

$$م = الطول \times العرض$$

$$م = 10 \times 6$$

$$م = 60 \text{ وحدة مربعة}$$

لإيجاد مساحة المثلث :

$$م = \frac{1}{2} \times ق \times ع$$

$$م = \frac{1}{2} \times 8 \times 5$$

$$م = 20 \text{ وحدة مربعة}$$

∴ مساحة الشكل الكلية = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

$$= 60 + 20$$

$$= 80 \text{ وحدة مربعة}$$

∴ مساحة الشكل الكلية = 80 وحدة مربعة .

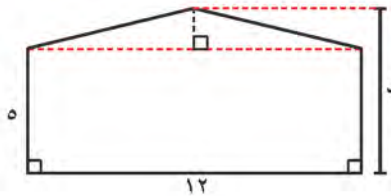
تدرّب (١) :

أوجد مساحة الشكل المجاور .

$$\text{مساحة المستطيل} = 12 \times \dots$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times (\dots \times 12)$$

$$\text{مساحة الشكل} = \dots + \dots = \dots$$



أحياناً تحتاج إلى أن تلجأ إلى عملية الطرح لإيجاد مساحة بعض الأشكال الهندسيّة .

تذكر أن :

- مساحة الشكل تعني

مساحة منطقة الشكل .

- مساحة المثلث =

$$\frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$



- مساحة المستطيل =

$$\text{الطول} \times \text{العرض}$$



- مساحة المربع =

$$\text{طول الضلع} \times \text{نفسه}$$



- مساحة متوازي

الأضلاع =

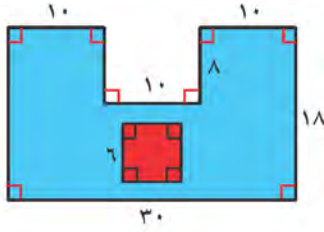
$$\text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$



مثال (٢) :

أوجد مساحة الشكل الكليّة ، ثم أوجد مساحة الجزء الملوّن بالأزرق .

اقسم الشكل إلى ٣ مستطيلات .



مساحة المستطيل (ب)

$$م = ل \times ض$$

$$٨ \times ١٠ = م$$

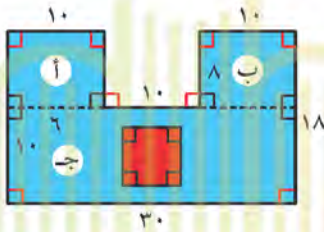
$$٨٠ = م \text{ وحدة مربعة}$$

مساحة المستطيل (أ)

$$م = ل \times ض$$

$$٨ \times ١٠ = م$$

$$٨٠ = م \text{ وحدة مربعة}$$



مساحة المستطيل (ج)

$$م = ل \times ض$$

$$١٠ \times ٣٠ = م$$

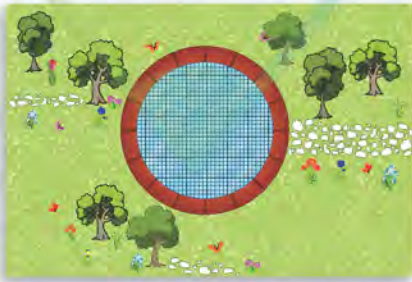
$$٣٠٠ = م \text{ وحدة مربعة}$$

∴ مجموع مساحة المستطيلات الثلاثة = $٨٠ + ٣٠٠ + ٨٠ = ٤٦٠$ وحدة مربعة

∴ مساحة المربع = $ل^٢ = ٦^٢ = ٣٦$ وحدة مربعة

∴ مساحة الجزء المطلوب = $٣٦ - ٤٦٠ = ٤٢٤$ وحدة مربعة .

تدرّب (٢) :



إحدى الحداثق العامة على شكل مستطيل أبعاده

٢٠ وحدة طول ، ٣٠ وحدة طول . تتوسّط الحديقة

بركة ماء دائريّة الشكل ، طول نصف قطرها

٥ وحدة طول . يحيط ببركة الماء ممرّ دائريّ عرضه

وحدة طول واحدة . أراد المسؤولون عن الحديقة

زرع المساحة الباقية من الحديقة بالزهور . ما

مساحة المنطقة التي سيتمّ زرعها؟ (اعتبر $\pi = ٣,١٤$) .

الحل :

$$\text{مساحة المستطيل} = \dots \times ٢٠ = \dots$$

$$\text{مساحة البركة مع الممرّ} = ٣,١٤ \times (\dots + \dots) = \dots$$

$$\text{الباقي} = \dots - ٦٠٠ = \dots$$

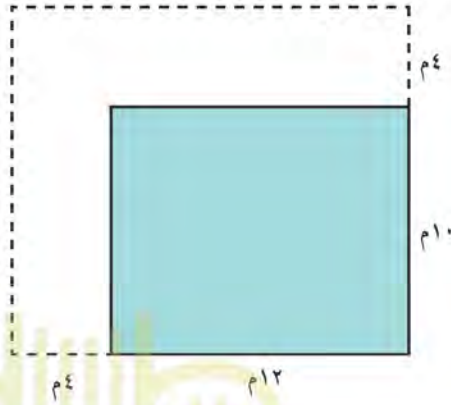
∴ تبلغ مساحة المنطقة التي سيتمّ زرعها وحدة مربعة .

تذكر أنّ :

مساحة الدائرة = π نق^٢



١ لدى حسام حديقة مستطيلة الشكل ، قام بإضافة ٤ م إلى كل من الطول والعرض كما هو مبين في الشكل . ما مقدار المساحة الإضافية للحديقة ؟



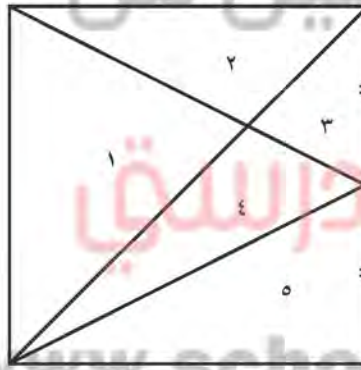
ب) 104 م^2

أ) 16 م^2

د) 224 م^2

ج) 120 م^2

٢ تم تقسيم المربع المجاور إلى خمسة أجزاء ، اختر العبارة الصحيحة مما يلي :



أ) مساحة الجزء (١) < مساحة الجزء (٢) + مساحة الجزء (٥)

ب) مساحة الجزء (١) > مساحة الجزء (٢) + مساحة الجزء (٥)

ج) مساحة الجزء (١) = مساحة الجزء (٢) + مساحة الجزء (٥)

د) مساحة الجزء (١) > مساحة الجزء (٥) - مساحة الجزء (٢)

٣ خمسة مربعات وضعت بجانب بعضها بحيث أصبح محيطها ٧٢ سم ، فما طول ضلع المربع ؟

د) ٦ سم

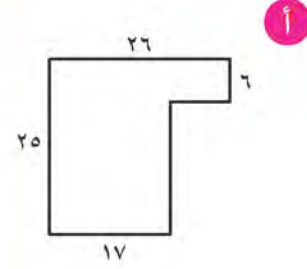
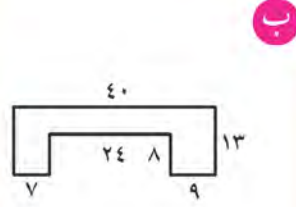
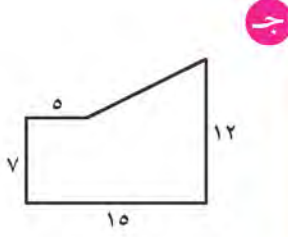
ج) ١٠ سم

ب) ٨ سم

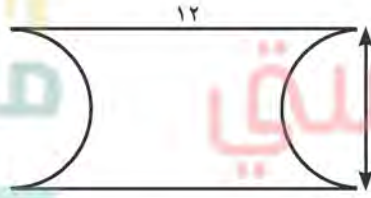
أ) ١٢ سم

تمرّن :

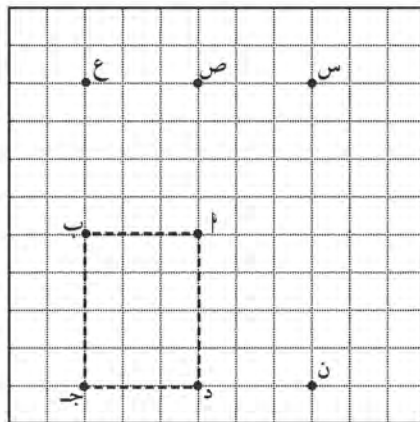
١ أوجد مساحة كلّ شكل من الأشكال التالية :



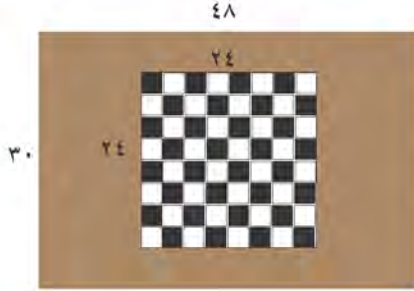
٢ في الشكل رقعة مستطيلة الشكل اقتطع منها نصف دائرة . أوجد مساحة المنطقة الباقية .



٣ اعتمادًا على النقاط المرسومة ، ارسم مثلثًا مساحته ضعف مساحة المستطيل (أ ب ج د) فسر اجابتك .



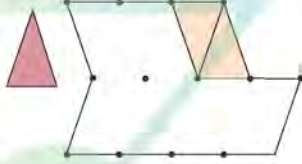
- ٤ طاولة على شكل مستطيل أبعادها ٤٨ وحدة طول، ٣٠ وحدة طول، موضوع على سطحها في المنتصف رقعة شطرنج مربعة طول ضلعها ٢٤ وحدة طول. ما مساحة الطاولة غير المغطاة برقعة الشطرنج؟



- ٥ حائط أبعاده ٤ وحدة طول، ٣ وحدة طول، وفيه شبك أبعاده ٢ وحدة طول، ١,٥ وحدة طول. ما مساحة ورق الحائط اللازم لتغطية هذا الحائط؟

- ٦ يقوم عامل بتغطية جزء من الأرضية باستخدام بلاطة مثلثة الشكل

أ استكمل تغطية الشكل بالبلاطات، ثم احسب عدد البلاطات اللازمة لتغطية الشكل.

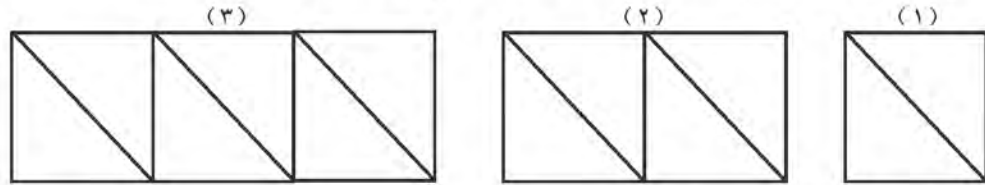


ب إذا كانت مساحة البلاطة الواحدة ٢٥ سم^٢، فما

مساحة الشكل؟ وضح إجابتك.

مساحة الشكل تساوي

- ٧ تم ترتيب المثلثات القائمة الزاوية لتكون النمط المبين، إذا كانت مساحة كل مثلث منها تساوي ١٢ سم^٢، فأوجد مساحة الشكل الخامس.



مساحة الشكل الخامس تساوي

اكتب القاعدة:

مساحة السطوح (ثلاثية الأبعاد) Surface Area (3 D)

٤-١١

سوف تتعلم : إيجاد مساحة سطح المجسم المتعدد السطوح .

نشاط (١) :



مما سبق دراسته أكمل الجدول التالي :

اسم	المجسم	الشبكة للمجسم	قانون المساحة السطحية
مكعب			$6 \times \text{مساحة المربع}$ $= 6 \times l^2$
شبه مكعب			$2 \times (\text{مساحة القاعدة}) + 2 \times (\text{مساحة الوجه ١}) + 2 \times (\text{مساحة الوجه ٢})$ $= 2 \times (l \times \text{ض}) + 2 \times (l \times \text{ع}) + 2 \times (\text{ض} \times \text{ع})$
منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع			$2 \times \text{مساحة المثلث} + 3 \times \text{مساحة المستطيل}$ $= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \text{ع} \times \text{ع} \right) + 3 \times (l \times \text{ع})$
هرم رباعي قاعدته مربعة الشكل			$\text{مساحة القاعدة (المربع)} + 4 \times \text{مساحة السطح الجانبي الواحد (المثلث)}$ $= l^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2} \times \text{ع} \times \text{ع} \right)$
أسطوانة دائرية قائمة			$2 \times \text{مساحة القاعدة (الدائرة)} + \text{مساحة السطح الجانبي (المستطيل)}$ $= 2 \times (\pi \times \text{ر}^2) + (\pi \times \text{ر}^2 \times \text{ع})$

العبارات والمفردات :

مجسم متعدد الأوجه
Polyhedron
Face وجه
Edge حرف
Vertex رأس
مساحة سطحية
Surface Area
Prism منشور
Base قاعدة
Cylinder أسطوانة

معلومات مفيدة :

يستخدم مصممو الديكورات الداخلية المساحة السطحية لتحديد كمية المواد اللازمة لتغطية الأشياء المجسمة .



تذكر أن :

المنشور القائم هو منشور حروفه الجانبية متعامدة مع قاعدته .

نشاط (٢) :



بالرجوع إلى النشاط (١):

المساحة السطحية للمنشور القائم المرسوم

$$= 2(ع \times ل) + 2(ع \times ض) + 2(ل \times ض)$$

بأخذ ٢ و ع عامل مشترك من الحد الأول والثاني :

$$= 2 \times ع(ل + ض) + (2 \times ل \times ض)$$

$$= 2(ل + ض) \times الارتفاع + 2مساحة القاعدة$$

$$= محيط القاعدة \times الارتفاع + 2مساحة القاعدة$$

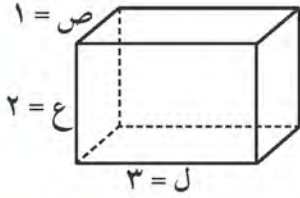
تذكر أن :

- محيط المستطيل =

$$2(ل + ض)$$

- مساحة المستطيل =

$$ل \times ض$$



المساحة الجانبية للمنشور
الرباعي القائم =
محيط القاعدة \times الارتفاع

مثال (١) :

أوجد المساحة السطحية للمنشور القائم الذي أبعاده : ١ وحدة طول ، ٢ وحدة طول ، ٣ وحدة طول .

الحل :

المساحة السطحية للمنشور القائم =

$$= 2(ل \times ع) + 2(ع \times ض) + 2(ل \times ض)$$

بأخذ ٢ و ع عامل مشترك من الحد الأول والثاني :

$$= 2 \times ع(ل + ض) + (2 \times ل \times ض)$$

$$= 2(ل + ض) \times الارتفاع + 2مساحة القاعدة$$

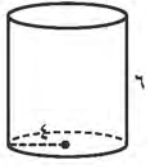
$$= محيط القاعدة \times الارتفاع + 2مساحة القاعدة$$

$$= 2(1 + 3) \times 2 + 2 \times 1 \times 3$$

$$= 2 \times 4 + 2 \times 3$$

$$= 16 + 6$$

$$= 22 \text{ وحدة مربعة}$$



نشاط (٣) :



بالرجوع إلى النشاط (١):

مساحة سطح الأسطوانة الجانبي = محيط القاعدة

$2 =$ مساحة القاعدة (الدائرة) + مساحة المستطيل (مساحة السطح المنحني للأسطوانة $2\pi r$) (ع)

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$$

بأخذ $2\pi r$ عامل مشترك

$$= 2\pi r (r + h)$$

المساحة السطحية للأسطوانة الدائرية القائمة $= 2\pi r (r + h)$

تذكر أن :

- محيط الدائرة

$$= 2\pi r$$

- مساحة الدائرة

$$= \pi r^2$$



مثال (٢) :

أوجد المساحة السطحية للأسطوانة . (باعتبار $\pi = 3,14$)

الحل :

مساحة سطح الأسطوانة الجانبي = محيط القاعدة

$2 =$ مساحة القاعدة (الدائرة) + مساحة المستطيل (مساحة السطح المنحني للأسطوانة $2\pi r$) (ع)

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$$

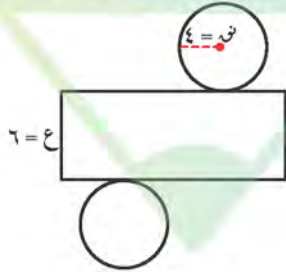
بأخذ $2\pi r$ عامل مشترك

$$= 2\pi r (r + h)$$

المساحة السطحية $= 2\pi r (r + h)$

$$= 2 \times 3,14 \times (4 + 6)$$

$$= 2 \times 3,14 \times 10 = 62,8$$





تدرّب (١)

إذا أردنا طلاء خزان الناقله الموضح بالشكل بدهان يتكلف المتر المربع منه ٤ دنانير .

فكم يكلف دهان الخزان؟ (باعتبار $\pi = 3,14$)

مساحة سطح الخزان = $2\pi r^2 + \pi r l$ (نه + ع)

$$2 \times (3,14 \times 0,5^2) + 3,14 \times 0,5 \times 3,14 =$$

$$2 \times (3,14 \times 0,25) + 3,14 \times 0,5 \times 3,14 =$$

$$1,57 + 4,96 =$$

$$6,53$$

تكلفة دهان الخزان = $6,53 \times 4 = 26,12$ دينار

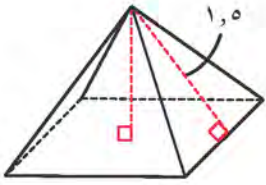
تم التحميل من



فكر وناقش
إذا كانت الأسطوانة من غير قاعدتين ، فما المساحة السطحية لها ؟

www.school-kw.com

مثال (٢) :



يُستخدم في إحدى المسرحيات التي تدور أحداث قصتها في مصر نموذج لهرم منتظم رباعي القاعدة . ومساحة قاعدته $٦,٢٥$ وحدة طول مربعة . إذا كان ارتفاع الوجه الجانبي $١,٥$ وحدة طول ، فأوجد المساحة السطحية لهذا الهرم .

الحل :

بما أن قاعدة الهرم هي مربع مساحته $٦,٢٥$ وحدة طول مربعة .

إذا طول ضلع المربع $= \sqrt{٦,٢٥} = ٢,٥$ وحدة طول

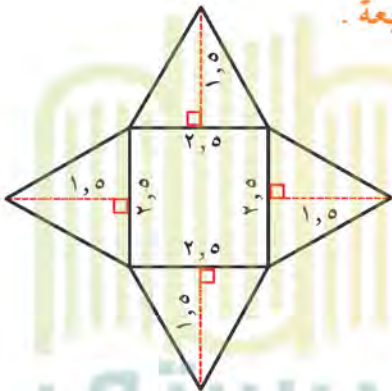
يتضمن الهرم ٤ أوجه مثلثية متطابقة.

مساحة الوجه الواحد $= \frac{١}{٢} ق \times ع$

$$= (١,٥ \times ٢,٥) \times \frac{١}{٢} = ١,٨٧٥ \text{ وحدة مربعة}$$

∴ المساحة السطحية للهرم $= ٦,٢٥ + ١,٨٧٥ \times ٤$

$$= ١٣,٧٥ \text{ وحدة مربعة .}$$



مدرستي
school-kw.com

تم التحسين بن
موقع مدرستي

www.school-kw.com

تمرّن :

١ ما الفرق بين المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه ٥ وحدة طول وشبه مكعب أبعاده ٣ وحدة طول ، ٤ وحدة طول ، ٧ وحدة طول .

$$١٣ = \text{مساحة سطح المكعب} = ٦ \times ٦ = ٥ \times ٥ = ١٥ \text{ وحدة مربعة}$$

$$٢٣ = \text{مساحة سطح شبه المكعب} = (٦ \times ٦) + (٦ \times ٣) + (٤ \times ٣)$$

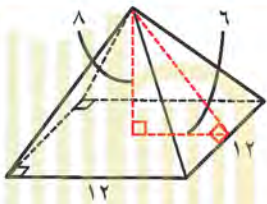
$$= ٦١ \times ٣ = ١٢٩$$

$$١٣ - ١٢٩ = ١١٦$$

- ٢ في إحدى المدن الكبرى فندق أسطوانيّ الشكل طول قطر قاعدته الدائرية ٣٥ وحدة طول وارتفاعه ٥٠ وحدة طول . تمت تغطية السطح المنحني بالزجاج . ما مساحة الزجاج الذي يُغطّي السطح الجانبي للفندق ؟ (اعتبر $\frac{22}{7} = \pi$)

مساحة الزجاج = مساحة الأسطوانة الجانبية = $\pi r h$ نخرج

$$= 22 \times 17.5 \times 50 = 50000 \text{ وحدة مربعة}$$



- ٣ أ ما نوع الهرم المبين في الشكل ؟

هرم رباعي لقاعدة

ب ما ارتفاع هذا الهرم ؟

٨ وحدات طول

- ج ما مساحة الوجه المثلثي ؟ طول وتر المثلث لهرم = $10 = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$$7 = 1 \times 6 = 1 \times 10 \times \frac{1}{2} = 6 \times 10 \times \frac{1}{2}$$

- د ما المساحة السطحية للهرم ؟

مساحة القاعدة + $4 \times$ مساحة الواجهة

$$12 \times 12 + 4 \times 36 = 144 + 144 = 288 \text{ وحدة مربعة}$$

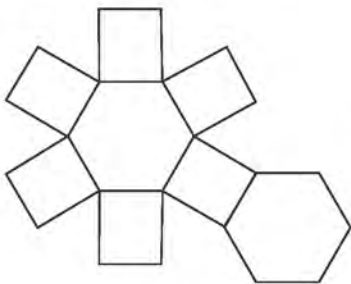
- ٤ من خلال الشبكة المرسومة أكمل :

أ اسم المجسم :

مستطوي قائم

ب عدد الأسطح الجانبية =

٦ اوجه



حجم الأسطوانة الدائرية - حجم المخروط الدائري Volume of Cylinder and cone

١١-٥



سوف تتعلم : إيجاد حجم الأسطوانة وحجم المخروط .

نشاط (١) :



أكمل الجدول التالي :

الحجم (لفظيًا)	حجم الشكل (رمزيًا)	مساحة القاعدة للشكل	اسم المنشور القائم	الشكل
الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع	$ل \times د$	$ل \times د$	مكعب	
الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع	$ل \times ض \times ع$	$ل \times ض$	شبه المكعب	
مساحة القاعدة × الارتفاع	$\pi ر^2 ع$	$\pi ر^2$	أسطوانة	

يمكن إيجاد حجم المنشور القائم باستخدام القانون التالي :

$$\text{حجم المنشور القائم} = \text{مساحة القاعدة (م)} \times \text{الارتفاع (ع)} \quad (\text{لفظيًا})$$

$$ح = م \times ع \quad (\text{رمزيًا})$$

مساحة قاعدة أي أسطوانة م = $\pi ر^2$ ، حيث ر = طول نصف القطر . بالتالي :

حجم الأسطوانة (ح) = م × ع = $(\pi ر^2) \times ع$

معلومات مفيدة :

تكون الطرود المرسلّة
أحيانًا على شكل
منشور أو أسطوانة ،
ويُحدّد حجم الطرد
مقدار الحيز اللازم
لشحنه .



تذكر أن :

- مساحة المربع

$$= ل \times ل = ل^2$$

- مساحة المستطيل

$$= ل \times ض$$

- حجم المكعب

$$= ل \times ل \times ل = ل^3$$

- حجم شبه المكعب

$$= ل \times ض \times ع$$

مثال (١) :

أوجد حجم الأسطوانة المبيّنة في الشكل المجاور : (اعتبر $\pi = 3,14$)

الحل :

أوجد أولاً مساحة القاعدة (م) :

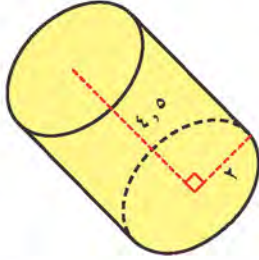
$$م = \pi \text{ نوه}^2$$

$$م = \pi (2)^2 = 3,14 \times 4 = 12,56 \text{ وحدة مربعة}$$

استخدم م لإيجاد الحجم :

$$ح = م \times ع = 12,56 \times 4,5 = 56,52 \text{ وحدة مكعبة}$$

∴ الحجم = 56,52 وحدة مكعبة .



تذكر أنّ :

مساحة المثلث

$$= \frac{1}{2} \text{ نصف طول}$$

القاعدة × الارتفاع

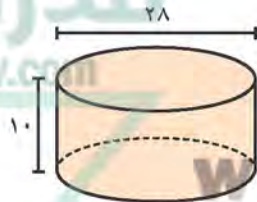
مساحة الدائرة

$$= \pi \text{ نوه}^2$$

تم التحميل من

تدرّب (١) :

أوجد حجم كل أسطوانة .

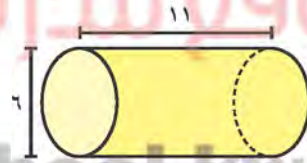


$$\text{استخدم } \pi = \frac{22}{7}$$

حجم الأسطوانة = $\pi \text{ نوه}^2 \times ع$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{28}{2}\right)^2 \times 10$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 10 = 6160 \text{ وحدة مكعبة}$$



$$\text{استخدم } \pi = 3,14$$

حجم الأسطوانة = $م \times ع$

$$= \pi \text{ نوه}^2 \times ع$$

$$= 3,14 \times \left(\frac{11}{2}\right)^2 \times 6$$

$$= 3,14 \times 3 \times 3 \times 3 = 99 \times 3,14 = 311,86$$

وحدة مكعبة

نشاط (٢) :



اللوازم :

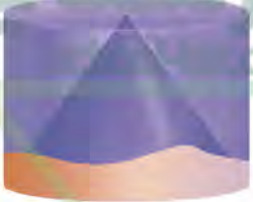
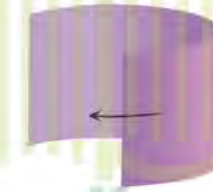
- أكواب وأقباغ
- مقص
- شريط لاصق
- مسطرة
- ورق مقوى
- فرجار
- رمل ملون



- ١ استخدم الفرجار لترسم دائرة طول نصف قطرها ١٠ وحدة طول ، واستخدم المسطرة لترسم نصف قطر هذه الدائرة ، ثم قص الدائرة .

- ٢ قص الورقة عند نصف القطر الذي رسمته .

- ٣ أمسك أحد طرفي الخط الذي قطعت عنده ولفه بحيث تصنع مخروطًا . استخدم الشريط اللاصق لتثبيت المخروط .



تم التعميل من

- ٤ قس ارتفاع هذا المخروط وسجله .
- ٥ قص مستطيلًا ارتفاعه مساوٍ لارتفاع المخروط ،

واصنع منه أسطوانة على أن يكون قطر قاعدتها مساويًا لقطر قاعدة المخروط .

- ٦ املا المخروط بالرمل الملون ، ثم اسكبه في الأسطوانة .

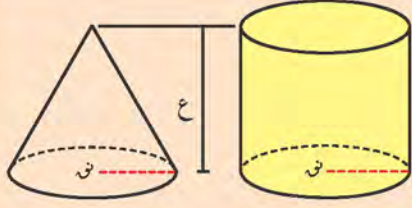
كرّر هذه العملية بعد ذلك مرّتين .

- ٧ ماذا تلاحظ عن كمّيّة الرمل في الأسطوانة في نهاية

المرحلة الثالثة ؟ اشرح إجابتك .



- ٨ ناقش مع زملائك العلاقة بين حجم الأسطوانة وحجم المخروط .



حجم المخروط هو $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع.

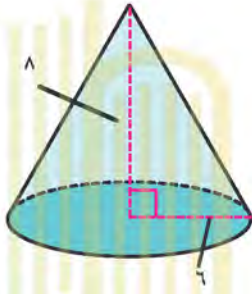
$$ح\text{ مخروط} = \frac{1}{3} \times (ع \times م) = \frac{1}{3} \times (\pi \times ن^2 \times ع),$$

حيث م مساحة القاعدة، ع الارتفاع.

مثال (٢) :

أوجد حجم المخروط المبين في الشكل المجاور :

$$(اعبر \pi = 3,14)$$



الحل :

أوجد أولاً مساحة القاعدة الدائرية (م) :

$$م = \pi \times ن^2$$

$$م = 3,14 \times 26^2 = 113,04 \text{ وحدة مربعة}$$

استخدم م لإيجاد الحجم :

$$ح = \frac{1}{3} \times (ع \times م)$$

$$ح = \frac{1}{3} \times (8 \times 113,04) = 301,44 \text{ وحدة مكعبة}$$

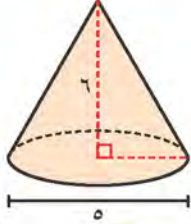
∴ الحجم = 301,44 وحدة مكعبة.

مدرستي
school-kw.com

www.school-kw.com

فكر وناقش

قال جمال إنَّ حجم المخروط يساوي ثلث حجم أي أسطوانة . فهل ما قاله جمال صحيح؟ وضح ذلك .



تدرّب (٢) :

أوجد حجم المخروط المبين في الشكل المجاور :

(اعتبر $\pi = 3,14$)

حجم المخروط = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

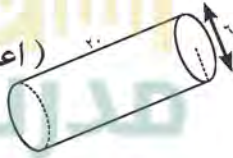
$$= \frac{1}{3} \times 3,14 \times 14^2 \times 3 = 3,14 \times 14 \times 14 \times 1 = 3,14 \times 196 = 615,44$$

حجم المخروط = 615,44

تمرّن :

أوجد حجم كل مجسم مما يلي :

(اعتبر $\pi = 3,14$)



(اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)



حجم الاسطوانة = $\pi r^2 h$

$$= 3,14 \times 3^2 \times 7 = 3,14 \times 9 \times 7 = 3,14 \times 63 = 197,82$$

$$= 197,82 = 63 \times 3,14$$

حجم الاسطوانة = $\pi r^2 h$

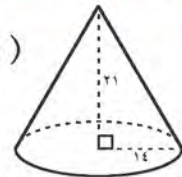
$$= \frac{22}{7} \times 3^2 \times 7 = 22 \times 9 = 198$$

$$= 198 = 9 \times 22$$

(اعتبر $\pi = 3,14$)



(اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$)



الحجم = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times 3,14 \times 3^2 \times 10 = 3,14 \times 3 \times 10 = 94,2$$

$$= 94,2 = 3,14 \times 30$$

$$= 94,2 = 3,14 \times 30$$

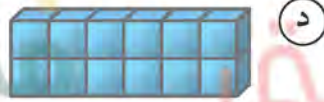
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14^2 \times 10 = \frac{22}{3} \times 14 \times 14 \times 10 = 22 \times 14 \times 14 \times 10 = 43120$$

$$= 43120 = 14 \times 14 \times 10 \times 22$$

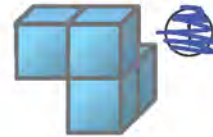
- ٥ صومعة (مخزن) للغلال على شكل أسطوانة ارتفاعها ٩ أمتار ، وطول قطرها ٢ ، ٤ أمتار ، ما عدد الأمتار المكعبة التي يمكن للصومعة تخزينها ، مقربًا الناتج إلى أقرب م^٣ ؟ (اعتبر $\pi = ١٤ , ٣$)

$$\begin{aligned} \text{حجم الصومعة} &= \text{حجم أسطوانة} = \pi \times \text{نوع} \\ &= ٩ \times ٣,١ \times ٣,١ \times ١٤ = \\ &= ١٦٥٨,٦٦ = ١٦٥٨,٦٦ \approx ١٦٥٩ \text{ م}^٣ \end{aligned}$$

- ٦ جميع المكعبات الصغيرة التالية لها نفس الحجم ، أي مجسم من المجسمات التالية له حجم مختلف عن باقي المجسمات ؟

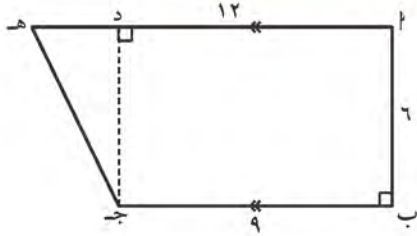


- ٧ يقلب الشكل التالي في وضعيات مختلفة . أي من الأشكال التالية يمكن أن يمثل هذا الشكل السابق بعد قلبه ؟



مراجعة الوحدة الحادية عشرة
Revision Unit Eleven

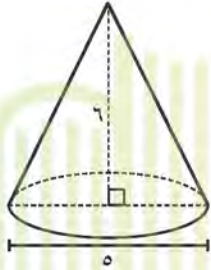
٦-١١



١ أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب ج د المرسوم أمامك .

$$3 \times 21 = 7 \times \frac{9+12}{2} = 6 \times \frac{19+12}{2}$$

$$7 \times 3 =$$

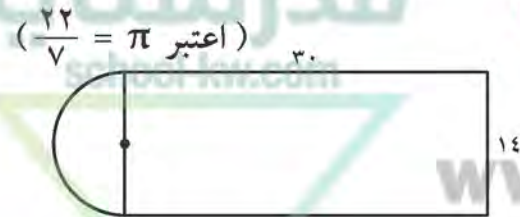


٢ أوجد حجم المخروط المرسوم أمامك . (اعتبر $\pi = 3,14$)

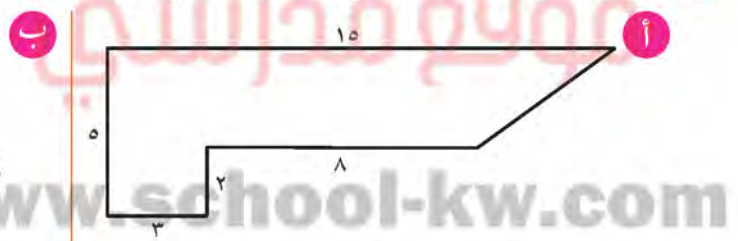
$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \times \pi \times \text{نصف القطر}^2 \times \text{الارتفاع} = 6 \times 3,14 \times 5 \times 5 \times \frac{1}{3}$$

$$39,50 = 6,28 \times 6,28 =$$

٣ أوجد مساحة الأشكال غير المنتظمة المرسومة .

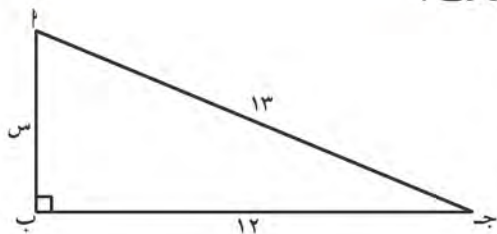


(اعتبر $\frac{22}{7} = \pi$)



www.school-kw.com

٤ أوجد طول ضلع القائمة في المثلث أ ب ج المرسوم أمامك :



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$169 = 144 + b^2$$

$$b = \sqrt{25} = 5$$

- ٥ أثبت أن Δ ب ج قائم الزاوية ، حيث $أب = ٧$ وحدة طول ، $بج = ٢٤$ وحدة طول ، $أج = ٢٥$ وحدة طول .

$$٦٢٥ = ٢٤ \times ٢٥ = \angle(بج)$$

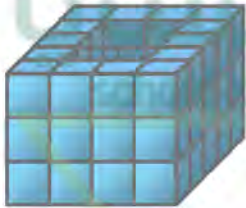
$$٦٢٥ = ٤٩ + ٥٧٦ = \angle(أب) + \angle(أج) = \angle(بج) + \angle(أب)$$

$$\angle(بج) + \angle(أب) = \angle(أب) \quad \Delta ب ج قائم$$

- ٦ إذا كان المستطيلان المرسومان وجهين لصندوق واحد ، فكم يكون حجم هذا الصندوق ؟



- أ) ٩٦٠ سم^٣
 ب) ٦٢٠ سم^٣
 ج) ٢٤٠ سم^٣ ✓
 د) ٦٠ سم^٣



- ٧ الشكل المقابل مكون من مكعبات جميعها من نفس الحجم وتوجد فتحة في منتصف الشكل ، فكم عدد المكعبات اللازمة لتعبئة الفتحة ؟

- أ) ٦
 ب) ١٢
 ج) ١٥
 د) ١٨ ✓

- ٨ إذا كان حجم مكعب وحجم أسطوانة متساويين وكان طول حرف المكعب وطول نصف قطر قاعدة الأسطوانة كلٌّ منهما يساوي ٦ سم ، فأى من القياسات الآتية هو الأقرب لأن يكون ارتفاعاً لهذه الأسطوانة ؟

- أ) ١ سم
 ب) ٢ سم ✓
 ج) ٣ سم
 د) ٤ سم

- ٩ يملك أحمد مزرعة على شكل مستطيل محيطه يساوي ٦٢ متر ، إذا كان طول الحديقة يزيد عن عرضها بـ ٥ أمتار ، فما طول وعرض هذه الحديقة ؟

الطول يساوي : ٣١٨ م عرض الحديقة س طولها س+٥

العرض يساوي : ٣١٣ م محيطها = س (الطول + العرض)


$$٦٢ = (س + ٥ + س)$$

$$٦٢ = ١٠ + ٤س$$

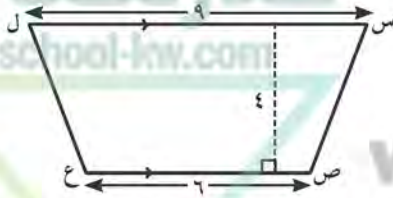
$$س = \frac{٥٢}{٤} = ١٣$$

اختبار الوحدة الحادية عشرة

أولاً: في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

<input checked="" type="radio"/>	(أ)	١ حجم أسطوانة طول نصف قطرها ٧ وحدة طول وارتفاعها ٥ وحدة طول يساوي ١١٠ وحدة مكعبة .
<input checked="" type="radio"/>	(أ)	٢ المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣ وحدة طول ، ٦ وحدة طول ، ٥ وحدة طول مثلث قائم الزاوية .
<input checked="" type="radio"/>	(ب)	٣ مساحة المنطقة المظللة في الرسم المقابل تساوي $1\frac{4}{7}$ وحدة مربعة . 
<input checked="" type="radio"/>	(ب)	٤ إذا كان حجم أسطوانة دائرية يساوي ٩٩ وحدة مكعبة ، فإن حجم المخروط المشترك معها بالقاعدة والارتفاع يساوي ٣٣ وحدة مكعبة .

ثانياً: لكل بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة :



٥ مساحة شبه المنحرف س ص ع ل المرسوم تساوي :

(أ) ٣٠ وحدة مربعة (ب) ٦٠ وحدة مربعة

(ج) ١٩ وحدة مربعة (د) ٤٢ وحدة مربعة

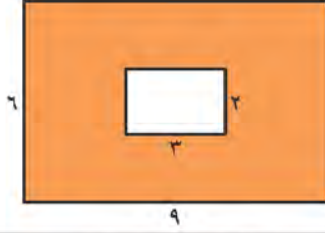
٦ صفيحة فارغة على شكل مكعب ، صب فيها الماء بمعدل ٢٠٠ سم^٣ في الدقيقة فامتألت بعد ٤٠ دقيقة ، فإن طول ضلع المكعب يساوي :

(أ) ٢٠ سم

(ب) ٤٠ سم

(ج) ٢٠٠ سم

(د) ٨٠٠ سم



٧ مساحة المنطقة المظللة تساوي :

- أ) ٧٠ وحدة مربعة (ب) ٦٠ وحدة مربعة
ج) ٥٤ وحدة مربعة (د) ٤٨ وحدة مربعة

٨ أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها ١٥ وحدة طول وارتفاعها ٣ وحدة طول ،
فإن مساحة السطح المنحني فقط تساوي :

- أ) ٧٠ وحدة مربعة (ب) ٤٥ وحدة مربعة (ج) ١٨ وحدة مربعة (د) ٤٤١ وحدة مربعة

٩ علبة بدون غطاء على شكل مكعب طول ضلعه س ، فإن المساحة السطحية للعلبة تساوي :

- أ) ٤ س^٢ (ب) ٥ س^٢ (ج) ٦ س^٢ (د) ٥ س^٢

١٠ إذا كانت مساحة قاعدة الهرم الرباعي تساوي ٢٥ وحدة مربعة ومساحة أحد الأوجه المثلثة
١٥ وحدة مربعة ، فإن مساحة الهرم السطحية تساوي :

- أ) ٨٥ وحدة مربعة (ب) ٤٠ وحدة مربعة (ج) ٦٠ وحدة مربعة (د) ٧٠ وحدة مربعة

مدرستي
school-kw.com

موقع مدرستي

www.school-kw.com

الاحتمال Probability

الوحدة الثانية عشرة

عالم المرح World of Fun



مشروع الوحدة :
(تصميم لعبة)



تساعد الألعاب على دخول البهجة والسرور إلى صدر المشترك عند معرفة فرص فوزه .
فمثلاً لعب الاحتمالات تساعد على المرح واللعب في الحياة . وعند ممارسة الإنسان لهذه
الألعاب فإنه يشعر بالسعادة فيؤثر ذلك إيجابياً على جميع نواحي حياته .

خطة العمل : تصميم لعبة على شكل دوارة :

- ستقوم كل مجموعة بتصميم دوارة تعتمد على مبادئ الاحتمال برسم عدد من القطاعات الدائرية المميزة (برقم ، حرف ، لون ، شكل ،) .

خطوات تنفيذ المشروع :

- حدد قوانين اللعبة الدوارة .
- أوجد فضاء العينة للدوارة التي رسمت عند كل مجموعة .
- أوجد احتمالات وقوف المؤشر عند أي قطاع دائري .

علاقات وتواصل :

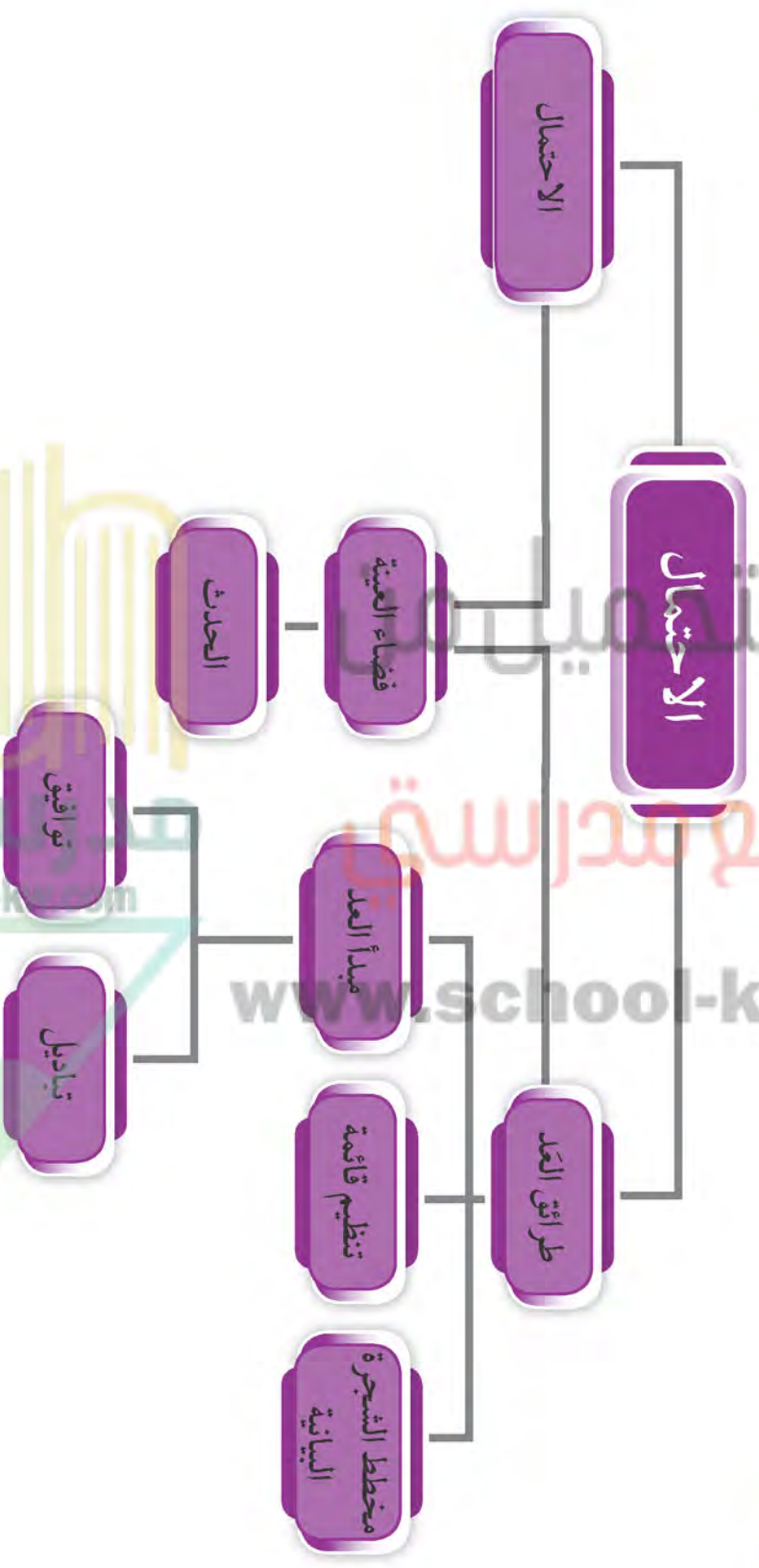
- تلعب المجموعات .
- تبادل الدورات بين المجموعات للعب .
- حدّد مواصفات التقييم ومدى جودة اللعبة (العدالة - التصميم - الأدوات) .

عرض العمل :

- اعرض وناقش اللعبة الأفضل جودة (العدالة - التصميم) .



مخطط تنظيمي للوحدة الثانية عشرة



طرائق العد Counting Methods

١٢-١



سوف تتعلم: مخطط الشجرة البيانية - تنظيم قائمة - مبدأ العد - التباديل - التوافيق .



(١) مبدأ العد

نشاط (١) :

زار خالد المدينة الترفيهية ، وعند دخوله حصل على هدية عبارة عن تذاكر مجانية للعبتين من أصل أربع لعب متاحة ومختلفة . فإذا كانت اللعب الأربع هي : الإعصار ، الدردور ، البرق ، السندباد .

فبكم طريقة يستطيع خالد اختيار اللعبتين المتاحتين له بشرط عدم تكرار اللعبة ؟
يمكن التوصل إلى عدد طرائق اختيار خالد للعبتين متاحتين له بعدة طرق منها :

(ب) مخطط الشجرة البيانية

اللعبة الأولى اللعبة الثانية

الدردور
البرق
السندباد

الإعصار

الإعصار
البرق
السندباد

الدردور

الإعصار
الدردور
السندباد

البرق

الإعصار
الدردور
البرق

السندباد

(أ) القائمة المنظمة

اللعبة الأولى اللعبة الثانية

الإعصار
الإعصار
الإعصار

الدردور
الدردور
الدردور

البرق
البرق
البرق

السندباد
السندباد
السندباد

العبارات والمفردات :

مخطط الشجرة البيانية

Tree Diagram

مبدأ العد

Counting

Principle

تنظيم قائمة

Organizing

a list

ترتيب

Arrangement

تباديل

Permutation

مضروب

Factorial

توافيق

Combination

معلومات مفيدة :

يستخدم علماء الأحياء مخططات الشجرة البيانية لتحليل ما قد يحدث في أجيال مختلفة من الكائنات الحية .

لاحظ أن :

عدد طرق اختيار خالد للعبة الأولى هو ٤ طرق ، وعدد طرق اختياره للعبة الثانية هو ٣ طرق وبذلك يستطيع اختيار لعبتين بـ ١٢ طريقة مختلفة .

ويمكن أيضاً التوصل لعدد طرق اختيار خالد للعبتين متاحيتين له بطريقة أخرى وهي :

عدد الطرق = عدد طرق اختيار اللعبة الأولى × عدد طرق اختيار اللعبة الثانية

$$= ٤ \times ٣ = ١٢ \text{ طريقة}$$

هذه الطريقة تسمى « مبدأ العد » ويفضل العمل بها إذا كان التمثيل بالقائمة المنظمة أو بالشجرة البيانية فيه صعوبة لكثرة البيانات المستخدمة وتعددتها .

مبدأ العد : هو عملية تتكون من خطوتين مستقلتين ، إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى n ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية m ، فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية هو : $n \times m$. ويمكن تعميم المبدأ لأكثر من خطوتين .

تدرّب (١) :

يقدم مطعم وجبات من طبق رئيسي إما لحم أو سمك أو دجاج ، وكل طبق رئيسي يقدم معه مقبلات من حساء أو سلطة .

أ أكمل مخطط الشجرة البيانية لتبين الوجبات الممكن تقديمها .

الوجبات	المقبلات	الأطباق
(لحم ، حساء) (لحم ، سلطة)	حساء سلطة	لحم
(سمك ، حساء) (سمك ، سلطة)	حساء سلطة	
(دجاج ، حساء) (دجاج ، سلطة)	حساء سلطة	دجاج



ب كم عدد الوجبات التي يمكن تقديمها ؟

$$\text{عدد الوجبات} = ٣ \times ٤ = ١٢ \text{ وجبات}$$

(٢) التباديل والترتيبات

٤ ٣ ٢ ١

نشاط (٢) :



أراد خالد التعرف على جميع الأعداد والتي يتكون كل منها من رقمين فقط من مجموعة الأرقام { ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ } على ألا يسمح بتكرار الرقم في العدد ، فهل تستطيع أن تساعده في أكمال مخطط الشجرة التالي ؟

الرقم الأول (رقم الآحاد) الرقم الثاني (رقم العشرات) الأعداد الممكنة

٢ ١	_____	٢	→	١
٣ ١	_____	٣	→	١
٤ ١	_____	٤	→	١
١ ٢	_____	١	→	٢
٣ ٢	_____	٣	→	٢
٤ ٢	_____	٤	→	٢
١ ٣	_____	١	→	٣
٢ ٣	_____	٢	→	٣
٤ ٣	_____	٤	→	٣
١ ٤	_____	١	→	٤
٢ ٤	_____	٢	→	٤
٣ ٤	_____	٣	→	٤

توجد ١٢ طريقة ممكنة لاختيار الرقمين المسموح بهما لتكون بهما العدد أي أن عدد الطرائق = عدد طرق اختيار الرقم الأول × عدد طرق اختيار الرقم الثاني
 $12 = 3 \times 4 =$

لاحظ أن : عند تبديل الرقمين ١ ، ٢ مثلاً حصلنا على العددين (٢١) ، (١٢) لذلك يكون الترتيب هنا مهم ، وتسمى كلاً منهما **ترتيبة** .

مما سبق عندما يكون **ترتيب العناصر** مهماً دون تكرار نسمي هذا الاختيار **تبديلاً** ونرمز له بالرمز (ل) .

معلومات مفيدة :

تستخدم التباديل عند ترتيب مجموعة مختارة من الصور الفوتوغرافية في ألبوم حسب ترتيب الأحداث .



من النشاط السابق :

استطعنا مع خالد أن نحصل على ١٢ طريقة (تبديلة) لنكوّن العدد المطلوب عند اختيار عنصران مختلفان من ٤ عناصر دون تكرار ومراعاة الترتيب فيهما ويمكننا كتابة ذلك على الصورة الرمزية :

$$12 = 3 \times 4 = \overset{4}{\underset{3}{\text{ل}}}$$

عدد عناصر المجموعة

عدد العناصر التي تم اختيارها

أ ما هو عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٣ عناصر من { ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ } لنكوّن بها أعدادًا من ثلاث أرقام ؟

مئات	عشرات	آحاد	منازل العدد
٢	٣	٤	عدد طرق الاختيار

عدد التبديلات = $4 \times 3 \times 2 = 24$ تبديلة

$$24 = 2 \times 3 \times 4 = \overset{4}{\underset{3}{\underset{2}{\text{ل}}}}$$

عدد عناصر المجموعة

عدد العناصر

ب ما هي عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٤ عناصر من { ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ } لنكون بها أعدادًا من أربعة منازل ؟

عدد التبديلات = $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ تبديلة = $4!$

- هل لاحظت نمطًا معينًا في عمليات الضرب السابقة ؟
- عملية الضرب على الصورة $4 \times 3 \times 2 \times 1$ (العوامل تتناقص بمقدار ١ ، وتنتهي بالعدد ١) يمكن كتابتها على الصور $(4!)$ وتقرأ (مضروب ٤)

مضروب العدد: اختيار (ن) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف وبدون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له بالرمز ن! ويكتب على الصورة:

$$n! = (n-1)(n-2) \dots (2-1) \times 1 = n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

أيضًا يمكننا كتابة $4!$ على الصورة : $4! = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$


فمثلاً : $5! = \frac{5!}{1!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 120$



التباديل: عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف ($m \geq n$) ومن دون تكرار أي عنصر منها، حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له بـرمز التبديلة ($n!_m$) ويكتب على الصورة:

$$(1) \quad n! = n(n-1)(n-2) \dots \text{ إلى } m \text{ من العوامل.}$$

$$(2) \quad n!_m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad n, m \in \mathbb{N}^+$$

تدرّب (٢): 

أوجد كل من:

أ $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$

ب $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$

ج $5040 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 7!$

د $60 = 3 \times 4 \times 5 = 3!_5$

هـ $72 = 8 \times 9 = 2!_9$

و $840 = 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 4!_8$

ز $6 = 1 \times 2 \times 3 = 1!_3 = (7-1)!$

تدرّب (٣):  www.school-kw.com

تستخدم إحدى المدن لوحات ترخيص الدرجات والتي تحتوي على عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة للوحة، وباستخدام الأرقام من ١ إلى ٩ يريد المدير المسؤول عن تنظيم الدرجات أن يعرف عدد لوحات التراخيص التي يمكن إصدارها.

مئات	عشرات	آحاد	منازل العدد
٧	٨	٩	عدد طرق الاختيار

الحل: عدد طرق اختيار الرقم الأول (الآحاد) = ٩ طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثاني (العشرات) = ٨ طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثالث (المئات) = ٧ طرق

$$\text{عدد لوحات التراخيص} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

حل آخر: ترتيب العناصر مهم، وبدون تكرار فإن:

$$\text{عدد لوحات التراخيص} = 9!_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

مثال :

في تدرّب (٣) ، إذا سمح المدير المسؤول بتكرار الرقم ، فكم عدد لوحات التراخيص التي يمكن إصدارها ؟

الحل : ترتيب العناصر مهم ، ومسموح بالتكرار فإن :
عدد لوحات التراخيص = $9 \times 9 \times 9 = 729$ لوحة

فكر وناقش

عرض المعلم المثال التالي : كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ في حالة السماح بتكرار الأرقام .
وليد يرى أنّ حل المثال هو : عدد الطرق الممكنة = $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ طريقة
جاسم يرى أنّ حل المثال هو : عدد الطرق الممكنة = $4 \times 4 \times 4 \times 3 = 192$ طريقة
فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك .

لاحظ أنّ :

$$1 = !0 \quad (1)$$

$$1 = !1 \quad (2)$$

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1 \quad (3)$$

$$\text{فمثلاً : } 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \dots \text{ وهكذا ...}$$

تدرّب (٤) :

اختير ٥ طلاب للجنة الرياضية بفصلك ، على أن يتم اختيار رئيس ونائب رئيس ومقرر لهذه اللجنة من الطلاب الخمس ، فبكم طريقة يتم اختيار المرشحات للمناصب الثلاث ؟

عدد طرح اختيار المرشحات للمناصب الثلاث = $5 \times 4 \times 3 = 60$ طريقة

(٣) التوافق

نشاط (٣) :



أراد معلم الرياضة البدنية في مدرستك أن يستعين بك لتصمم معه جدول مباريات لفرق كرة القدم من فصول الصف الثامن من مجموعة الفرق { ١ ، ب ، ج ، د } من دور واحد . فهل تستطيع أن تساعد في إكمال مخطط الشجرة التالي لتصميم جدول المباريات ؟

معلومات مفيدة :

يختار المدربون التوافق عندما يبدأون في تشكيل فريق .



الفريق الأول الفريق الثاني المباريات الممكنة

ب ، ١

ب

ج ، ١

ج

د ، ١

د

ب ، ١

١

ب ، ج

ج

ب ، د

د

ب ، ١

١

ب ، ج

ب

د ، ج

د

١ ، د

١

ب ، د

ب

د ، ج

ج

أكمل ما يلي :

- ١ هل المباراة بين الفريقين ١ ، ب هي نفسها المباراة ب ، ١ ؟ **نعم**
- ٢ هل الترتيب مهم لإيجاد عدد المباريات ؟ **كلا** ولماذا ؟ **لأنه دور واحد**
- ٣ أوجد عدد المباريات الممكنة = **٦** مباريات

مما سبق عندما يكون ترتيب العناصر غير مهم نسمي هذا الاختيار **توافق** ونرمز له بالرمز (ق) .

- في النشاط السابق ، إن اختيار فريقين من أربعة فرق لا يحتاج إلى ترتيب ، أي أن ترتيب فريقين نعتبره اختياراً واحداً .

لذلك نقسم عدد التباديل $4!$ على $(2!)$ التي تمثل عدد المجموعات الثنائية المكررة أي أن :

$$6 = \frac{3 \times 4}{1 \times 2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4!}{2!}$$

عدد عناصر المجموعة عدد الاختيارات

التوافق: عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف ($n \geq m$) حيث ترتيب العناصر غير مهم سنرمز له برمز التوفيق ($n \text{ ق } m$) وتكتب على الصورة :

$$n \text{ ق } m = \frac{n!}{m! (n-m)!} \quad n \geq m$$

إذا كان $n! = \frac{n!}{(n-m)! m!} = n \text{ ق } m$ ، فإن $n \text{ ق } m = \frac{n!}{(n-m)! m!}$

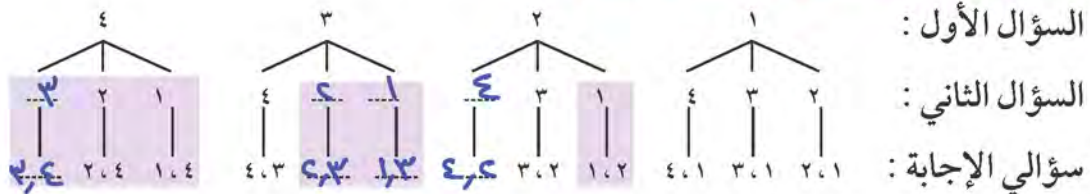
تكتب التوافق بصورة أخرى : $n \text{ ق } m = \binom{n}{m}$ وتقرأ ن فوق م .

تدرّب (٥) :

في إحدى الاختبارات مطلوب الإجابة على سؤالين فقط من أربعة أسئلة متاحة ، فبكم طريقة يمكنك أن تختار سؤالين للإجابة ؟

نفرض أن أرقام الأسئلة هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فتكون طرق اختيار سؤالي الإجابة هي :

• الطريقة الأولى : (طريقة مخطط الشجرة)



∴ عدد طرق اختيار سؤالي الإجابة = 6 طرق

ملاحظة :

عندما تتحقق من إجابتك عن مسألة ما تتضمن توافق ، تأكد من إلغاء الإمكانات التي هي عبارة عن تكرار لبعضها بعضاً .

• الطريقة الثانية : (طريقة المجموعات)

• المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الأول هي : $\{1, 2\}$ ، $\{1, 3\}$ ، $\{1, 4\}$

• المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الثاني (ما عدا السؤال الأول) هي : $\{2, 3\}$ ، $\{2, 4\}$ ، $\{3, 4\}$

• المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الثالث (ما عدا السؤالين الأول والثاني) هي : $\{3, 4\}$ ، $\{2, 4\}$ ، $\{1, 4\}$

عدد طرق اختيار سؤالي الإجابة = 6 طرق

• الطريقة الثالثة : (بقانون التوافيق)

$${}^4C_2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$${}^4C_1 = \frac{4!}{1! \times 3!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 3 \times 2 \times 1} = 4$$

$${}^4C_0 = \frac{4!}{0! \times 4!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1$$

تدرّب (٦) :

قرر ما إذا كان الترتيب ضروريًا أم لا في كل من المواقف التالية :

- اختيار ٤ اسطوانات مدمجة من ١٠ اسطوانات مدمجة . (.....)
- اختيار أرقام لفتح التليفون المحمول . (.....)
- جلوس الطلاب في الفصل . (.....)
- اختيار وترتيب الحروف أ ، ب ، ج ، د من دون تكرار . (.....)

تدرّب (٧) :

تقدم إحدى المطاعم أنواع من الفطائر حسب الطلب ، مما يلزم وضع خمسة أنواع من منكهات الطعام وهي (فلفل ، بصل ، طماطم ، تونة ، زيتون) . ما عدد الطرائق المختلفة :

أ) لا اختيار اثنان من منكهات الطعام ؟ ${}^5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ طرق

ب) لا اختيار ثلاثة من منكهات الطعام ؟ ${}^5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ طرق

ج اختيار خمسة من منكهات الطعام؟ ${}^5P_5 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 1$ طريقة

د لعدم اختيار أي نوع من منكهات الطعام؟ ${}^0P_0 = 1$

فكر وناقش

في تدرب (٧)، ماذا تلاحظ في إجابتك على كل من (أ)، (ب) وأيضًا إجابتك على كل من (ج)، (د)؟

تمرّن:

١ استخدم مبدأ العد لإيجاد عدد النواتج في كل حالة:

أ ما عدد طرائق الاختيار لطلاء: من نوعين من الطلاء، ٥ ألوان؟

$${}^5P_2 = 5 \times 4 = 20 \text{ طرق}$$

ب ما عدد طرائق الاختيار لدراجة: من ٥ ألوان، ٣ أحجام، ٤ موديلات؟

$${}^4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ طرق}$$

٢ أوجد كل مما يلي:

أ ${}^7P_1 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

ب ${}^8P_4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$

ج ${}^5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$$336 = 7 \times 7 \times 8 = 3!^3$$

$$10 = 10!$$

$$12 = 1 \times 3 \times 1 \times 2 = 1! \times 2!$$

$$24 = 1 \times 2 \times 3 \times 2 = 1! \times 3! \times 2!$$

٣ كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من ١ إلى ٥ إذا كان :

أ يمكن تكرار الأرقام . $5^4 = 625$

ب لا يمكن تكرار الأرقام . $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

٤ في مزرعة أرانب يلزم وضع ٦ أرانب في ٦ أقفاص . بكم طريقة يمكن عمل ذلك بحيث يكون أرنب واحد في كل قفص؟

$$16 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6! \text{ طريقة}$$

٥ كم عدد الطرائق التي يمكن أن يتم بواسطتها اختيار طالبين مع مراعاة الترتيب أو أن يكون واحدًا تلو الآخر من ٨ طلاب؟

$$8 \times 7 = 56 \text{ طريقة}$$

٦ أوجد ما يساويه كل من :

$$\begin{array}{|l} \text{أ} \quad 1 = \frac{!8}{!0 \times !8} = {}^8\text{ق}^8 \\ \text{ب} \quad 1 = \frac{!7}{!1 \times !7} = \binom{7}{1} \\ \text{ج} \quad 56 = \frac{!8}{!3 \times !5} = {}^8\text{ق}^8 \\ \text{د} \quad 7 = \frac{!7}{!6 \times !1} = {}^7\text{ق}^7 \end{array}$$

٧ ذهبت مع أصدقائك إلى مطعم صيني يقدم ٦ أطباق . فبكم طريقة يمكنك اختيار ٣ من هذه الأطباق للمشاركة مع أصدقائك؟

$$\frac{!6}{!3 \times !3} = \frac{!6}{!3 \times !3} = \frac{!6}{!3 \times !3} = 20 \text{ طرق}$$

٨ في لعبة الكراسي الموسيقية يقوم جاسم وخالد ومحمد بالجري للجلوس على مقعدين ، أوجد عدد الطرائق المختلفة للجلوس على المقعدين .

$$\frac{!3}{!1 \times !1} = \frac{!3}{!1 \times !1} = \frac{!3}{!1 \times !1} = 6 \text{ طرق}$$

٩ ما هي عدد الطرائق المختلفة لقراءة كتابين من ٥ كتب خلال إجازة نهاية الأسبوع؟

$$\frac{!5}{!3 \times !2} = \frac{!5}{!3 \times !2} = \frac{!5}{!3 \times !2} = 10 \text{ طرق}$$

فضاء العينة Sample Space

١٢-٢

سوف تتعلم : إيجاد فضاء العينة .

العبارات والمفردات :

فضاء العينة

Sample Space



نشاط (١) :

يمكن لرواد أحد المطاعم اختيار وجبة طعام تتكون من طبق رئيسي ومقبلات وحلوى من بين عدة خيارات موضحة في قائمة الطعام المقابلة .

أجب عن الأسئلة التالية من خلال قائمة الطعام الموضحة أمامك :

١ ما عدد خيارات المقبلات ؟

٢ ما عدد خيارات الطبق الرئيسي ؟

٣ ما عدد خيارات الحلوى ؟

٤ ما عدد الوجبات الممكنة التي يُقدمها المطعم ؟

إن مجموعة كل النواتج الممكنة عند إجراء تجربة عشوائية تسمى **فضاء العينة (ف)** .



مثلاً : عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإن :

كل النواتج الممكنة هي ظهور صورة (ص)

أو ظهور كتابة (ك) ويكون فضاء العينة هو { ص ، ك } ،

وعدد النواتج يساوي ٢

تدرّب (١) :

اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وحدد عدد النواتج .

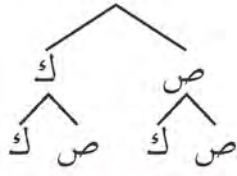
١ أكمل الجدول لتبين كل النواتج الممكنة :

ك	ص	الرمية الأولى الرمية الثانية
ك ، ص	ص ، ص	ص
ك ، ك	ص ، ك	ك

ب) فضاء العينة (ف) = { (ص، ص)، (ص، ك) } ،

{ (ك، ك)، (ك، ص) } ،

ج) عدد النواتج = $2 \times 2 = 4$

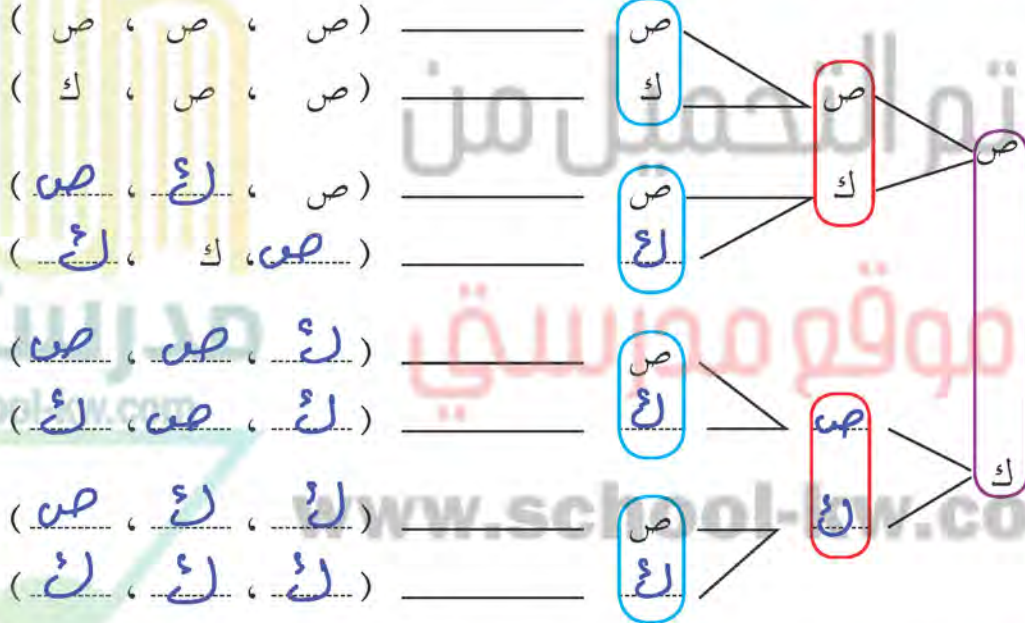


تدرّب (٢) :

اكتب فضاء العينة لتجربة رمي ثلاث قطع نقود متمايضة مرة واحدة وحدد عدد النواتج .

أ) أكمل مخطط الشجرة لتبين كل النواتج الممكنة :

الرمية (١) الرمية (٢) الرمية (٣)



ب) فضاء العينة = { (ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك) } ،

(ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)

(ك، ك، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ص، ص)، (ص، ك، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ص، ص)

ج) عدد النواتج = 8

د) عدد الاختيارات باستخدام مبدأ العد = $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

فكر وناقش

هل عدد النواتج الممكنة لرمي قطعة نقود أربع مرات متتالية يساوي عدد النواتج الممكنة لرمي أربع قطع نقود متمايضة مرة واحدة؟ وضح ذلك .

تذكّر أنّ :

متمايز تعني مختلفة من حيث اللون والشكل والحجم .

تدرّب (٣) :

يمكنك أن تختار شطيرة من بين ثلاثة أنواع من الشطائر (دجاج ، لحم ، سمك) للغداء ، وعصيرًا من بين ثلاثة أنواع من العصير (برتقال ، مانجو ، فراولة) .

اكتب فضاء العينة ، ثم أوجد عدد الطرائق الممكنة التي يمكن أن تحصل عليها .

ف = { (دجاج ، برتقال) ، (دجاج ، مانجو) ، (دجاج ، فراولة) ، (لحم ، برتقال) ، (لحم ، مانجو) ، (لحم ، فراولة) ، (سمك ، برتقال) ، (سمك ، مانجو) ، (سمك ، فراولة) } عدد الطرائق = ٣ × ٣ = ٩

الحدث (الحادثة) هو : مجموعة جزئية من فضاء العينة (ف) .

تدرّب (٤) :

صندوق فيه ثلاث كرات ألوانها هي : الأحمر (ح) ، البرتقالي (ب) ، الأزرق (ز) . إذا سحبت من الصندوق كرة عشوائيًا ثم أعدتها ، وسحبت كرة مرة أخرى عشوائيًا .

١ أكمل لكتابة فضاء العينة (ف) .

الكرة	ح	ب	ز
ح	(ح ، ح)	(ح ، ب)	(ح ، ز)
ب	(ب ، ح)	(ب ، ب)	(ب ، ز)
ز	(ز ، ح)	(ز ، ب)	(ز ، ز)

٢ أي الأحداث التالية (مؤكد - مستحيل - بسيط - مركب) ؟

- أ سحبت كرتين الأولى حمراء والأخرى برتقالية اللون . **بسيط**
- ب سحبت كرة حمراء اللون وكرة حمراء . **بسيط**
- ج سحبت كرة برتقالية اللون وكرة صفراء . **مستحيل**
- د سحبت كرتين من اللون نفسه . **مركب**
- ه سحبت كرة حمراء اللون وكرة سوداء اللون . **مستحيل**

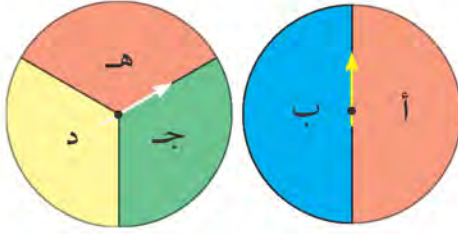
تمرّن :

١ اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد ثم إلقاء قطعة نقود .



ف = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (١ ، ٦) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

٢ تم تدوير الدوارتين المقابلتين معًا . اكتب فضاء العينة وحدد عدد النواتج الممكنة .

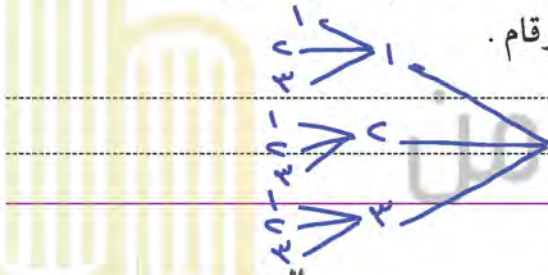


فضة = { (أ، هـ) ، (أ، د) ، (أ، جـ) ، (ب، هـ) ، (ب، د) ، (ب، جـ) }

$$\text{عدد لنواتج} = 3 \times 2 = 6$$

٣ اختر جاسم الأرقام التالية : ١ ، ٢ ، ٣

ارسم مخطط الشجرة البيانية لتبين كل الأعداد المؤلفة من رقمين مختلفين التي تختارها من بين هذه الأرقام .

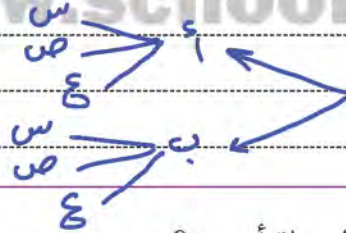


٤ يريد أحمد أن يقوم برحلة عبر النهر .

يوجد نوعان من المراكب (أ) ، (ب) كما في الصورة ليختار بينهما ويختار من بين ثلاثة جداول مائية صغيرة في ثلاثة اتجاهات مختلفة : س أو ص أو ع .



أ اصنع مخطط الشجرة البيانية لكل النواتج الممكنة .



ب ما فضاء العينة لرحلة أحمد ؟

فضة = { (أ، ص) ، (أ، ع) ، (ب، ص) ، (ب، ع) ، (ب، ص) ، (ب، ع) }

ج أوجد عدد النواتج الممكنة .

$$6 = 2 \times 3$$

الاحتمال Probability

٣-١٢

سوف تتعلم : احتمال وقوع الحدث - الاحتمال الهندسي .



نشاط :



أراد مبارك أن يدخل في لعبة ويجرب حظها في هذه اللعبة ، فاختار حجر نرد ورماه وحدد ظهور عدد زوجي لدخوله اللعبة .

ساعد مبارك لمعرفة هل يدخل إلى هذه اللعبة أم لا بإكمال ما يلي :

- عناصر فضاء العينة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، عددها ٦
- عناصر الحدث ظهور « عدد زوجي » = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، عددها ٣
- نسبة عدد عناصر الحدث « ظهور عدد زوجي » إلى عدد عناصر فضاء العينة = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$
- النسبة المئوية لدخوله إلى اللعبة المختارة = $\frac{١}{٢} \times ١٠٠ = ٥٠\%$

إنَّ احتمال وقوع حدث ما يقارن عدد الطرائق التي يمكن أن يقع فيها هذا الحدث بعدد النواتج الممكنة بحيث يعبر عن الاحتمال بكسر اعتيادي كالتالي :

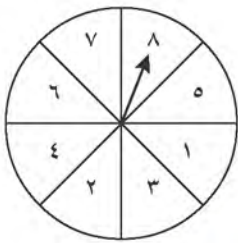
$$\text{احتمال وقوع (حدث } P) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } P}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } F} \iff L(P) = \frac{\text{عدد عناصر } P}{\text{عدد عناصر } F}$$

يرمز للاحتمال وقوع (حدث) بالرمز L (حدث) .

لاحظ أن :

- احتمال فضاء العينة (الحدث المؤكد) = ١ أي أن $L(F) = ١$
- احتمال الحدث المستحيل = صفر أي أن $L(\emptyset) = ٠$

تدرّب (١) :



يلعب حسن وعلي لعبة القرص الدوار المبين بالشكل بحيث يربح حسن الجائزة إذا وقف المؤشر على عدد فردي ، ويربح علي الجائزة إذا وقف المؤشر على عدد زوجي من برأيك فرصته أكبر للفوز؟ فسّر إجابتك. تساوي فرص الربح لأن عدد الأعداد الفردية مساوية للأعداد الزوجية

معلومات مفيدة :

يستخدم علماء الجيولوجيا (علم طبقات الأرض) الاحتمال لوصف إمكانية حدوث زلزال بالخطأ خلال عدد معين من السنوات.



تذكّر أن :

- عند تحويل كسر اعتيادي إلى كسر عشري ، اقسم البسط على المقام .
- الحدث (الحادثة) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة .
- يمكن التعبير عن الاحتمال أيضًا في صورة نسبة مئوية أو كسر عشري أو نسبة .



تدرّب (٢) :

إذا تم رمي قطعة نقود معدنية وحجر نرد معاً مرة واحدة .

أ أكمل مخطط الشجرة واكتب فضاء العينة .
 ف = { (١، ص)، (٢، ص)، (٣، ص)، (٤، ص)، (٥، ص)، (٦، ص) } ، { (١، ك)، (٢، ك)، (٣، ك)، (٤، ك)، (٥، ك)، (٦، ك) }



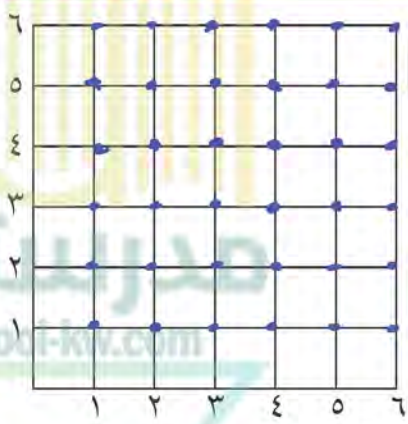
ب نفرض أن ج حدث ظهور صورة وعدد زوجي .

ج = { (١، ص)، (٢، ص)، (٣، ص)، (٤، ص)، (٥، ص)، (٦، ص) }
 عدد عناصر ج = ٦ ، عدد عناصر ف = ١٢
 \therefore احتمال ظهور صورة و عدد زوجي = $\frac{\text{عدد عناصر ج}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

تدرّب (٣) :

في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين ،

مستعيناً بالشبكة المقابلة احسب الاحتمالات التالية :



أ ل (مجموع العددين الظاهرين أقل من ٥) ؟

نفرض أن م حدث «مجموع العددين الظاهرين أقل من ٥»

∴ م = { (١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣) }
 عدد عناصر م = ٦ ، عدد عناصر ف = ٣٦

∴ ل (م) = $\frac{\text{عدد عناصر م}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ب ل (ظهور العدد ٥ في الحجر الأول والعدد ٤ في الحجر الثاني) ؟

نفرض أن ب حدث «ظهور العدد ٥ في الحجر الأول وظهور ٤ في الحجر الثاني»

ب = { (٤، ٥) }
 عدد عناصر ب = ١ ، عدد عناصر ف = ٣٦

∴ ل (ب) = $\frac{1}{36}$

ج ل (مجموع العددين الظاهرين ٩ أو ١٢) ؟

ج = { (٦، ٣)، (٥، ٤)، (٤، ٥)، (٣، ٦)، (٦، ٦) }
 \therefore ل = $\frac{5}{36}$

د ل (مجموع العددين الظاهرين ١٣) ؟

د = صفر

ملاحظة :

القاء حجري نرد متمايزين هو نفسه القاء حجر نرد مرتين متتاليتين .

تدرّب (٤) :

صندوق فيه ٩ كرات متماثلة تمامًا مرقمة من ١ إلى ٩ . سحب كرة عشوائيًا من الصندوق . أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

١ « ظهور عدد أصغر من ٤ » . $\frac{1}{3} = \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$

٢ ب « ظهور عدد فردي » . $\frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

٣ ج « ظهور عدد أصغر من ٤ أو ظهور عدد فردي » .

$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

تذكّر أنّ :

- مساحة المستطيل = $ل \times ض$
- مساحة المربع = $ل \times ل$
- مساحة المثلث = $\frac{1}{2} ق \times ع$
- مساحة الدائرة = $\pi ر^2$

تمرّن :

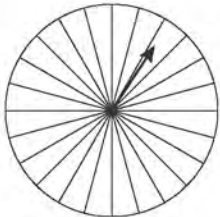
١ هناك ١٠ أزرار باللون الأحمر و ٤ باللون الأزرق و ٨ باللون الأبيض في حقيبة ، ما هي فرصة استخراج الزر الأزرق أو الأبيض ؟

- أ) $\frac{4}{22}$ ب) $\frac{8}{22}$ ج) $\frac{10}{22}$ د) $\frac{12}{22}$

٢ اشتركت ٤ طالبات في مسابقة { شوق ، شمائل ، مريم ، شهد } وسيتم اختيار الترتيب بصورة عشوائية ، ما احتمال أن يتم اختيار طالبة يبدأ اسمها بحرف الـ شين ؟

- أ) ٢٥% ب) ٥٠% ج) ٧٥% د) ٩٠%

٣ يبين الشكل التالي مغزل دائري ب ٢٤ قطاع دائري . إذا أدار أحد الأشخاص السهم فإنه من المحتمل أن يقف السهم عند أي قطاع من القطاعات المرسومة ، إذا كان :



- أ) $\frac{1}{8}$ من القطاعات زرقاء ب) $\frac{1}{4}$ منها بنفسجية
ج) $\frac{1}{4}$ منها برتقالية د) $\frac{1}{3}$ منها حمراء

و أدار شخص السهم ، فأى لون من القطاعات سيكون له أقل احتمالية بأن يقف عنده السهم ؟ البنفسجية

٤ في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة ، وملاحظة العدد الظاهر على وجهه .
أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

أ ظهور عدد زوجي $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

ب ظهور عدد أولي $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

ج ظهور عدد أكبر من ٧ $\frac{1}{6}$

د ظهور عدد أصغر من ٦ $\frac{5}{6}$

٥ ثلاث بطاقات مرقمة بالأرقام ١ ، ٤ ، ٧ في كيس ورقي ، سحبت بطاقة واحدة بطريقة عشوائية ثم أعيدت وسحبت بطاقة مرة أخرى .

أ اكتب فضاء العينة .

ج = { (١،١) ، (٤،١) ، (٧،١) ، (١،٤) ، (٤،٤) ، (٧،٤) ، (١،٧) ، (٤،٧) ، (٧،٧) }

ب اكتب حدث ظهور عدد أولي في السحبة الأولى وعدد زوجي في السحبة الثانية .

{ (٤،٧) }

ج احتمال حدث ظهور عدد أولي في السحبة الأولى وعدد زوجي في السحبة الثانية .

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

٦ ألقى سامي حجر نرد منتظمًا رميتين متتاليتين ، أوجد احتمال ظهور العدد ٦ في الرمية الأولى والعدد ١ في الرمية الثانية .

$\frac{1}{36}$



٧ في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة مرتين . أوجد احتمال كل من الأحداث التالية .

أ « ظهور صورة في الرمية الأولى » .

$$P = \frac{1}{2}$$

ب « ظهور كتابة في الرمية الثانية » .

$$P = \frac{1}{2}$$

ج « ظهور صورة في الرمية الأولى أو ظهور كتابة في الرمية الثانية » .

$$P = \frac{3}{4}$$



٨ عند تدوير القرص المجاور مرة واحدة . أوجد احتمال وقوف المؤشر عند كل من :

أ احتمال الحصول على (الرقم ١ أو أصغر من ٨) .

$$P = \frac{7}{8}$$

ب احتمال الحصول على (قطاع أصفر أو قطاع أبيض) .

$$P = \frac{3}{8}$$

ج احتمال الحصول على (قطاع أحمر أو عدد فردي) .

$$P = \frac{5}{8}$$

د احتمال الحصول على (مضاعف للعدد ٢ أو عدد يقبل القسمة على ٤) .

$$P = \frac{1}{4}$$

هـ احتمال الحصول على (عدد أولي أو قطاع أبيض) .

$$P = \frac{7}{8}$$

- ٩ في أحد معسكرات الشباب ٩ أشخاص من البحرين و ٨ أشخاص من الكويت ،
٧ أشخاص من السعودية . اختير من بينهم أحد الأشخاص عشوائياً .
احسب احتمال أن يكون من السعودية أو من الكويت .

$$\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

- ١٠ في كيس يوجد ٢٥ كرة بألوان مختلفة : أحمر ، أصفر ، أزرق ، وأخضر .
معطى أن عدد الكرات الحمراء مساو لعدد الكرات الزرقاء . احتمال إخراج كرة
حمراء هو ٠,٢٨ ، واحتمال إخراج كرة خضراء هو ٠,٣٢ ،

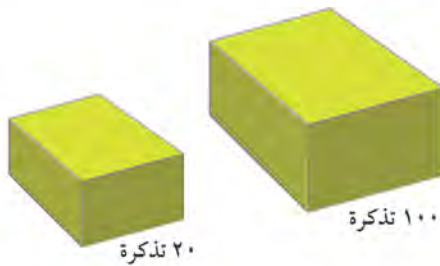
أ أكمل الجدول :

٠,٢٨	احتمال إخراج كرة حمراء
٠,١٤	احتمال إخراج كرة صفراء
٠,٤٨	احتمال إخراج كرة زرقاء
٠,٣٤	احتمال إخراج كرة خضراء

ب ما هو عدد الكرات الخضراء بالكيس ؟

$$25 \times 0,32 = 8 \text{ كرات}$$

- ١١ تحتوي العلبه الأصغر على ٢٠ تذكرة مرقمة من ١ إلى ٢٠ . بينما تحتوي العلبه
الأكبر على ١٠٠ تذكرة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ ، بدون النظر إلى التذاكر يمكنك
سحب تذكرة واحدة من كل علبه . أي علبه يكثر فيها احتمال سحبك لتذكرة عليها
الرقم ١٧ ؟

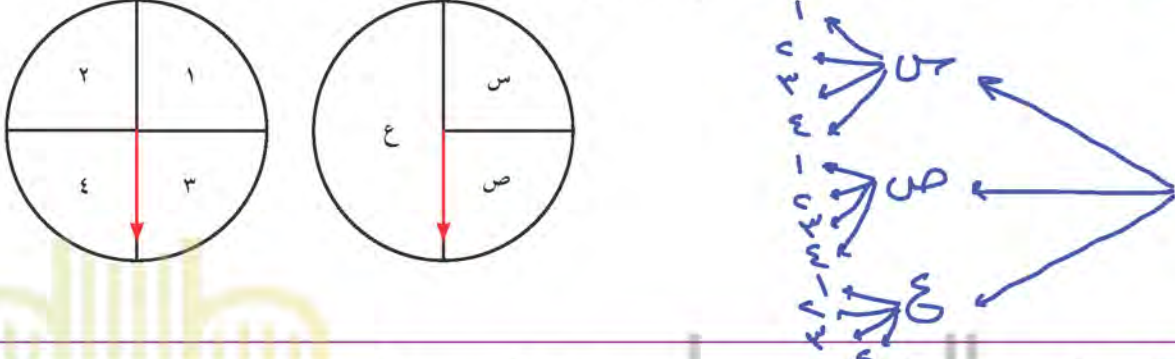


- أ العلبه ذات التذاكر الـ ٢٠ .
ب العلبه ذات الـ ١٠٠ تذكرة .
ج العلبتان لهما نفس الاحتمال .
د من المستحيل معرفة ذلك .

مراجعة الوحدة الثانية عشرة Revision Unit Twelve

١٢-٤

١ ارسم مخطط الشجرة البيانية لتوضيح النواتج الممكنة لتدوير اللوحتين الدوارتين :



٢ اتخذ خالد ٤ أرقام سرية لفتح الحاسوب. إذا كان اختياره لأرقام مختلفة من ١ إلى ٦ ، فأوجد عدد الطرائق المختلفة في اختيار ذلك الرقم السري .

$${}^6P_4 = 360 \text{ طريقة}$$

٣ تألفت لجنة من ٤ طلاب في الصف الثامن البالغ عدده ٢٨ طالبًا. بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٤ طلاب مؤلفة من : رئيس ، نائب رئيس ، أمين سر ، أمين صندوق ؟

$${}^{28}P_4 = 840 \text{ طريقة}$$

٤ عشرة من المخبرين السريين طلب رئيسهم ارسال اثنين منهم للقبض على أحد المشتبه فيهم ، ما عدد الطرائق المختلفة لإرسال اثنين منهم لإنجاز هذه المهمة ؟

$${}^8P_2 = 56 \text{ طريقة}$$



٥ عند تدوير القرص المجاور مرة واحدة .

أوجد :

أ احتمال الحصول على (الرقم ١١ أو أكبر من ٢١) .

$$\frac{5}{10}$$

ب احتمال الحصول على (قطاع أزرق أو عدد يقبل القسمة على ٢٣) .

$$\frac{3}{10}$$



٦ عند رمي حجر نرد مرة واحدة ، وسحب كرة عشوائيًا من

الكيس المجاور الذي فيه كرات . أوجد احتمال كل من :

أ ل (الحصول على ١ و كرة حمراء) $\frac{1}{3} = \frac{2}{10} \times \frac{1}{6}$

ب ل (الحصول على ٣ و كرة بنفسجية) $\frac{1}{3} = \frac{2}{10} \times \frac{1}{6}$

٧ عدد ركاب باص ٣٦ راكبًا ، نسبة الأطفال إلى الكبار في الباص ٥ إلى ٤

أ ما هو عدد الأطفال في الباص ؟

$$c. = 36 \times \frac{5}{9}$$

ب إذا اخترنا بشكل عشوائي أحد الركاب في الباص . ما هو الاحتمال بأن يكون الراكب من

الكبار ؟

$$\frac{4}{9}$$

إختبار الوحدة الثانية عشرة

أولاً : في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظللّ (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١	بعد الإعلان عن طلب وظائف ، تقدم ٨ أشخاص لوظيفة إدارية ، ٥ أشخاص للعمل على الحاسوب ، ٣ أشخاص مُبرمجي حاسوب . فإن عدد الطرائق المُختلفة لاختيار شخص واحد لكل وظيفة = ١٢٠ طريقة .	أ	<input checked="" type="radio"/>
٢	$١٠ = ٢^٥$.	أ	<input checked="" type="radio"/>
٣	عند رمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة . فإنّ فضاء العينة يساوي ٦ .	أ	<input checked="" type="radio"/>
٤	$٣ق٥ = ٣ق٥$.	ب	<input checked="" type="radio"/>

ثانياً: لكل بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين مرة واحدة ، فإنّ احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي ٨ هو :

٥ (د) school-kw

١ (ج) $\frac{1}{6}$

٢ (ب) $\frac{5}{6}$

٣ (أ) $\frac{5}{36}$



٥ (د) ٦٠

٢ (ب) ٥٠

٣ (أ) ٤٠

٤ (ج) ٣٠

٧ في الصف الثامن ٣٠ طالب ، احتمال اختيار طالب عشوائياً بحيث يكون عمره أقل من ١٣ سنة هو $\frac{1}{5}$. ما عدد طلاب الصف الذين تقل أعمارهم عن ١٣ سنة ؟

٦ (د) ٦

٥ (ج) ٥

٤ (ب) ٤

٣ (أ) ٣

٨ عدد عناصر فضاء العينة عند تجربة رمي قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية يساوي :

٥ (د) $٣ + ٢$

٢ (ب) ٣٢

٣ (أ) ٣×٢

٤ (ج) ٣×٢

٩ يوجد ١٠ كرات زجاجية (بلي) في حقيبة : ٥ كرات حمراء و ٥ كرات زرقاء . قامت سلوى بسحب كرة من الحقيبة بشكل عشوائي لون الكرة المسحوبة أحمر ، ثم قامت سلوى بإعادة الكرة إلى الحقيبة مرة أخرى ، ما مدى احتمالية أن تكون الكرة المسحوبة في المرة القادمة بشكل عشوائي حمراء ؟

٥ $\frac{1}{10}$

ج $\frac{1}{5}$

ب $\frac{4}{10}$

د $\frac{1}{2}$

١٠ $5 \times 4 = !$

٥ $!45$

٥ $!5$

ب $!9$

أ $!20$



تم التحميل من

موقع مدرستي

www.school-kw.com



تم التحميل من

موقع مدرستي

www.school-kw.com